इकाई 8 भिन्न : पूर्ण के भाग के रूप में

इकाई की रूपरेखा

8.1 परिचय

उद्देश्य

8.2 क्या आधा सचमुच आधा है?

8.3 पूर्ण के भाग; पूर्ण एक भाग

8.4 भिन्न द्वारा किसी भाग का निरूपण

8.5 भिन्नों की तुलना करना

8.6 मिश्रित भिन्न

8.7 सारांश

8.8 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

8.1 परिचय

वैसे तो भिन्न संख्याओं से बच्चों का सामना रोज़ होता रहता है मगर आम तौर पर इनके वास्तविक अर्थ को लेकर उनके विचार काफी उलझे हुए होते हैं। उदाहरण के तौर पर बातचीत में, जहां वास्तव में "भाग" शब्द का इस्तेमाल होना चाहिए, वहां बच्चे गलती से "आधा" शब्द को इस्तेमाल करते हैं। हमें आध केक तभी मिल सकता है जब केक को दो बराबर भागों में बांटा जाए। परन्तु वास्तव में हर भाग ही लगभग आधा होता है। जब हम आधा किलोग्राम चाय खरीदते हैं, तो वास्तव में हमनें एक पैकेट चाय खरीदी होती है। यहां कई बच्चों के लिए आधे का अर्थ केवल एक लेबल हो जाता है। आधे को लेकर बच्चों में एक और आम गलतफहमी यह होती है कि आधा तभी मिलता है जब एक पूर्ण (यानी एक पूरी वस्तु) के भाग किए जाएं। वे यह नहीं समझ पाते कि 'पूर्ण', चीज़ों का एक समूह भी हो सकता है। एक पूरे को दो आधों में बांटना बच्चों के लिए मुश्किल होता है। अक्सर यह देखा जाता है कि वे दो भाग करके रूकने की बजाय भाग करते चले जाते हैं। वे सोचते हैं कि एक बार काटने से एक भाग मिलता है और दो बार काटने से दो भाग। यह भी देखा गया है कि बच्चे किसी वस्तु, जैसे कि केक के भाग करते वक्त दो छोटे टुकड़े निकाल लेते हैं और एक बड़ा भाग अविभाजित ही छोड़ देते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि अक्सर बच्चों में भागें व पूर्ण के बीच सम्बंध की समझ नहीं होती। अगर किसी बच्चे के पास आधा भाग होता है तो वह यह नहीं समझ पाता कि दूसरा भाग भी आधा ही होगा। कारण यह है कि ऐसा समझने के लिए भाग और पूर्ण के आपसी सम्बंध को समझना आवश्यक होता है। बच्चों के विचार उलझे हुए क्यों होते हैं? इस इकाई में हमने कुछ ऐसी शिक्षण विधियों के सुझाव दिए हैं जिनसे बच्चों को इन उलझनों से बाहर निकलने में मदद मिल सकती है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

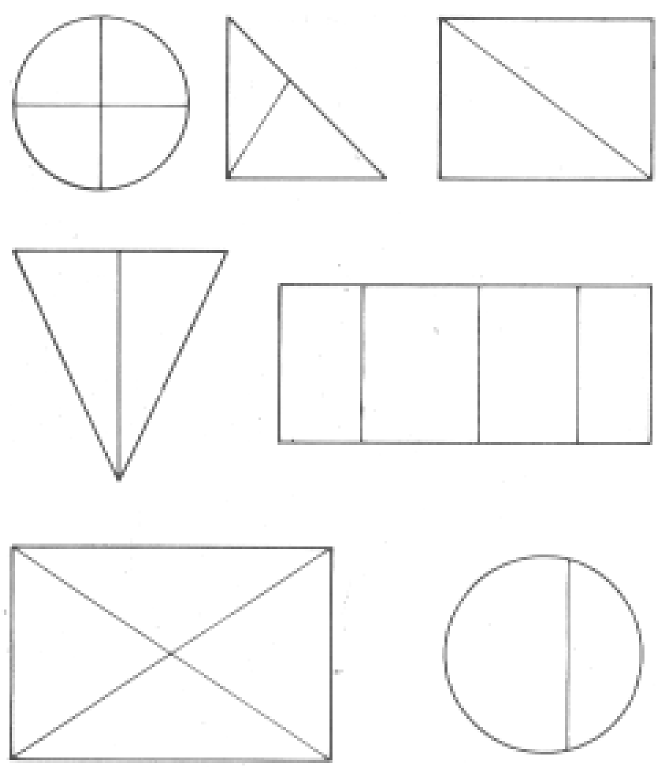
- भिन्न की संकल्पना पढ़ाने के लिए कई बाल केन्द्रित विधियों का प्रयोग कर सकेंगे।
- प्रयोग की गई विधि का मूल्याकंन कर सकेंगे।

- आवश्यकता पड़ने पर इकाई में वर्णित की गई विधि प्रयोग में ला सकेंगे।
- शिक्षण के ऐसे विधियों का प्रयोग कर पाएंगे जिनसे बच्चों को भिन्नों व संख्याओं के बीच का सम्बन्ध पहचानने तथा संकेतों के प्रयोग से भिन्नों का प्रतीकन करने में मदद मिलेगी।
- तुल्य भिन्नों की संकल्पना पढ़ाने के लिए विभिन्न बाल केन्द्रित विधियां प्रयोग कर सकेंगे।
- शिक्षण के ऐसे तरीकों का प्रयोग कर पाएंगे जिनसे बच्चों को एक से बड़े व एक से छोटे भिन्न पहचानने में मदद मिलेगी तथा वे भिन्नों को सही क्रम में लिख पाएंगे।

8.2 क्या आधा सचमुच आधा है?

जैसा उस दिन रेणु के घर हुआ, वैसी स्थितियों का सामना हममें से कई लोगों को हुआ होगा। उसके दो बच्चे, 10 साल की मीना और 8 साल का रवि खाना खा रहे थे। दोनों खाना पूरा हो गया था लेकिन एक चपाती बच गई थी। रेणु ने उनसे कहा कि उसे भी आपस में बांटकर खत्म कर दें। रवि ने चपाती ली, एक कोने से छोटा से टुकड़ा तोड़कर मीना को दे दिया। मैंने रवि से पूछा कि उसने अपनी बहन को कितना भाग दिया है। उसने बेहिचक जवाब दिया, 'आधा'। मैंने एक बिस्कुट लिया और एक छोटा से टुकड़ा उसे देकर पूछा कि उसे कितना बिस्कुट मिला। उसका जवाब वही था, 'आधा'। यानि रवि पूरी चीज़ के किसी भी टुकड़े को 'आधा' मानता है।

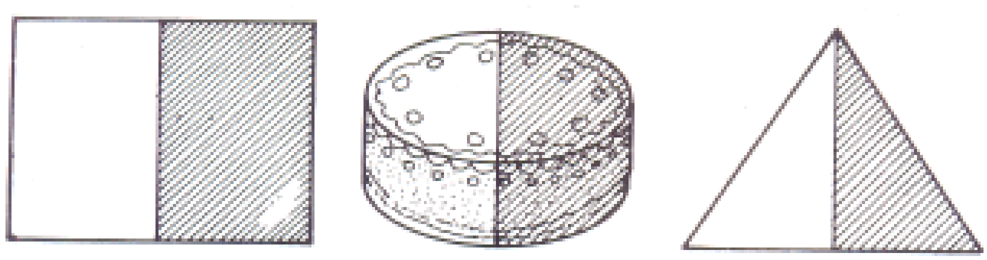
इस आयु समूह के बच्चों के साथ यह दिक्कत आम बात है। पूर्ण का कोई भी टुकड़ा उनके लिए आधा होता है। मगर यह गलतफहमी होती क्यों है? एक वजह तो ये हो सकती है कि उन्होंने बचपन में अपनी मां को इसी ढ़ंग से आधी चपाती या आधा गिलास दूध देते देखा होगा। मगर कौतूहलवश मैं तीसरी कक्षा के एक वर्ग में पहुंच गई जहां शिक्षिका एन. सी. ई. आर. टी. की पाठ्य पुस्तक में से 'भिन्न' पढ़ाना शुरू करने वाली थीं। उन्होंने विभिन्न आकृतियां बनाई जैसी कि चित्र 1 में दी गई हैं।



चित्र 1

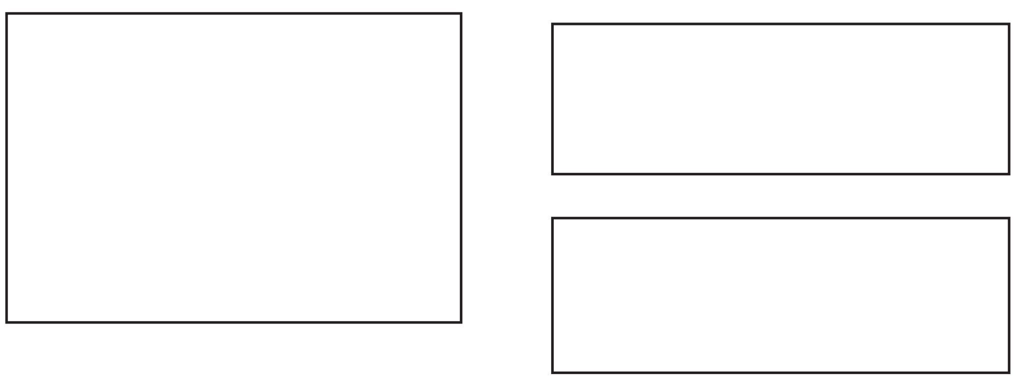
आकृतियां बनाने के बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि कौन सी आकृतियां दो बराबर भागों में बांटी गई है और कौन सी आकृतियां चार बराबर भागों में बांटी गई है। अधिकांश छात्रों के उत्तर सही थे।

तब उन्होंने चित्र 2 में दिखाई गई कुछ और आकृतियां बनाई।



चित्र 2

हर आकृति दो बराबर भागों में बंटी हुई थी। एक भाग छायादार था और दूसरा साफ। उन्होंने छात्रों को बताया कि हर आकृति में छायादार भाग और साफ भाग पूरे का आधा–आधा है तथा हम हर ऐसे भाग को 'आधा' कहते हैं। इसके बाद उन्होंने एक कागज़ लेकर, उसके दो किनारों को मिलाते हुए मोड़कर दो बराबर भागों में काट दिया।



चित्र 3

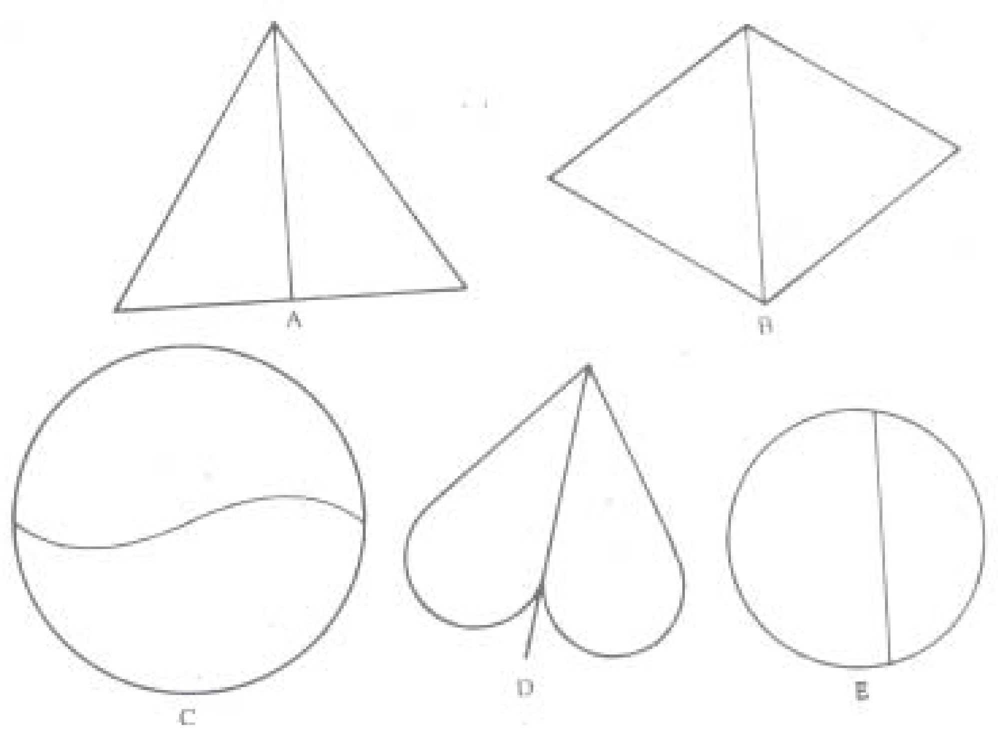
फिर उन्होंने दो छात्रों को बुलाया और प्रत्येक को एक–एक टुकड़ा दे दिया। अब उन्होंने पूरी कक्षा से पूछा कि दोनों छात्रों के पास कितना–कितना कागज़ है। पूरी कक्षा ने उत्तर दिया, 'आधा'। तब उन्होंने दोनों टुकड़े लिए और उन्हें एक के ऊपर एक रखकर बताया कि दोनों टुकड़े बराबर हैं। इसी ढंग से उन्होंने एक–चौथाई (या पाव) की संकल्पना भी समझाई। अन्त में उन्होंने किताब से कुछ प्रश्न कक्षा में करने को तथा कुछ गृहकार्य के रूप में दे दिए। शिक्षिका काफी संतुष्ट दिख रही थी। ऐसा लगता था कि वे जो कुछ करना चाहती थीं, उसे करने में सफल रहीं। लेकिन मुझे थोड़ा संदेह था। मुझे यकीन नहीं था कि यह बात सचमुच बच्चे समझ गए हैं कि किसी भी पूरी चीज़ का आधा प्राप्त करने के लिए दो बराबर भाग करने का महत्व क्या है। इसके अलावा यह समझना भी जरूरी था कि दो बराबर भाग करने के कई तरीके हो सकते हैं। यानी यह कोई जरूरी नहीं है कि विभाजक रेखा सरल रेखा ही हो।

मैंने तय किया कि अपने प्रेक्षणों के आधार पर कुछ मूल्यांकन करना चाहिए ताकि यह पता लगाया जा सके कि शिक्षिका व बच्चों के बीच वास्तव में कितना संवाद हुआ है। अनीता मेरी सहेली की बिटिया थी। दो दिन बाद मैं अनीता के घर चली गई। थोड़ी इधर–उधर की बातचीत के बाद मैंने अनीता को पांच आकृतियां दिखाई (देखिए चित्र–4)।

उदाहरण 1

मैं : अनीता, जरा बताओ इनमें से कौन सी आकृतियां दो बराबर भागों में बंटी हैं?

अनीता : आकृति A, B और E दो बराबर भागों में बंटी है। आकृति C नहीं बंटी है और D, हां ....D भी दो बराबर भागों में बंटी है।

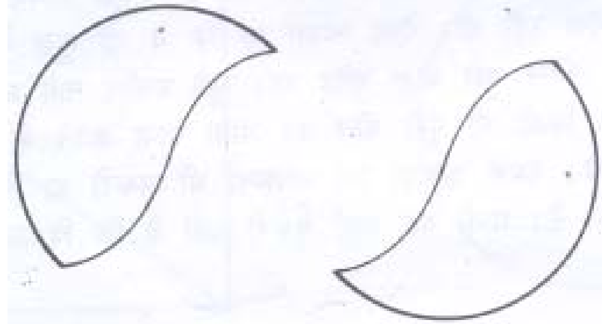


चित्र 4

मैं : क्या तुम पक्का कह सकती हो कि C दो बराबर भागों में नहीं बंटी है और E दो बराबर भागों में बंटी है।

अनीता : हां, आन्टी, मैं पक्का कह सकती हूँ।

मैं : अच्छा। चलो हम C की आकृति का एक कागज़ लेते हैं। मैं इसे बीच वाली वक्र रेखा पर से काट देती हूँ। लो, हमारे पास दो टुकड़े हो गए (चित्र 5 देखें)।



चित्र 5

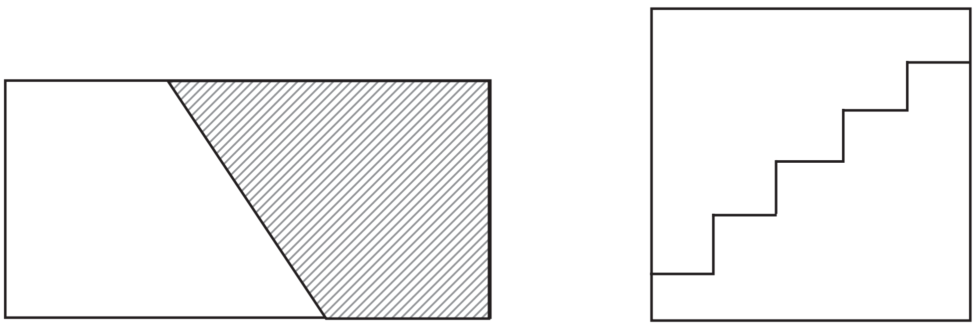
अब इन्हें एक के ऊपर एक रखें तो क्या होगा?
क्या एक टुकड़ा दूसरे पर पूरा आ जाता है?

अनीता : हां आन्टी।

मैं : मतलब दोनों टुकड़े बराबर हैं।

अनीता : हां, दो टुकड़े भी बराबर है। अब मुझे पता चल गया है कि C भी दो बराबर भागों में बंटी है।

मुझे बहुत अच्छा लगा कि अनीता ने स्वयं उत्तर दिया। अब मैंने आकृति E को लिया। हालांकि इसके दो भागों के बीच बहुत अन्तर नहीं था मगर कागज़ को काटकर मैं उसे समझा पाई कि इसके दो भाग बराबर नहीं हैं। मैंने उसके चित्र–6 में दिखाई दो और आकृतियों के बारे में बातचीत की।



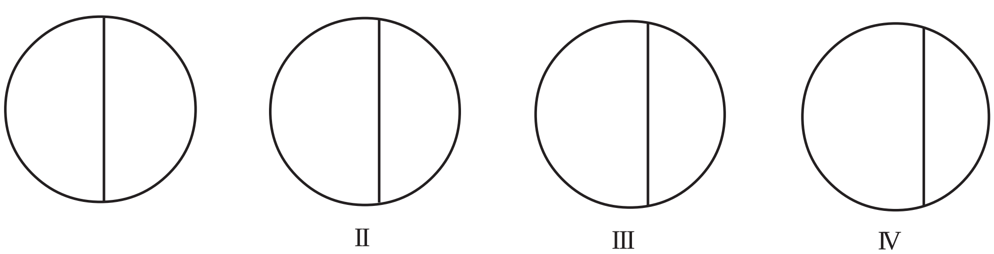
चित्र 6

अब अनीता विश्वास के साथ सही उत्तर दे रही थी।

अनीता को ऐसा क्यों लगा था कि C के दो बराबर भाग नहीं किए गए हैं?

दो भाग तब बराबर होते हैं जब एक को दूसरे पर रखने पर वह पूरा ढ़क जाए।

आकृति E को लेकर अनीता को जो दिक्कत आई, वह कोई अनोखी बात नहीं है। प्रायः यह देखा गया है कि जब तक दो भागों के बीच अन्तर एकदम स्पष्ट न हो जाए तब तक बच्चे उन्हें आधा ही कहते हैं। चित्र–7 की तीसरी आकृति तक वे दोनों भागों को बराबर ही बताते रहते हैं। इसका मतलब यह है कि कक्षा में पूर्ण के आधे की बात पढ़ाते वक्त दो बराबर भाग करने के महत्व पर ज़ोर देना चाहिए। बच्चों को यह दिखाया जाना चाहिए कि कब दो भाग सचमुच बराबर होते हैं। इस संदर्भ में हम यहां दो गतिविधियां दे रहे हैं। शिक्षक इन्हें अपनी कक्षा में करवा सकते हैं।



चित्र 7

उदाहरण 2 : एक बड़ा कागज़ और तीन–चार टुकड़े लें। बच्चों से यह पता लगाने को कहें कि कौन से टुकड़े बड़े कागज़ के आधे हैं।

उदाहरण 3 : एक रिबन लें। दो बच्चों से कहें कि वे इसे आपस में इस तरह बांटें कि दोनों को आधा–आधा मिले। जब वे आपस में बांट लें तो उनसे कहिए कि वे जांच करें कि क्या सचमुच दोनों भाग बराबर हैं।

इसके अलावा छात्रों से किसी वृत्त, वर्ग या त्रिकोण के दो बराबर भाग करने जैसी गतिविधि करवानी चाहिए। दो बराबर भाग 3-4 अलग–अलग ढंग से करने को कह सकते हैं। सिर्फ वृत्त, वर्ग या त्रिकोण के दो भाग करने का ही अभ्यास नहीं करवाना चाहिए। बच्चों को यह भी समझाना चाहिए कि यदि 10 कारों की दौड़ में पांच कारें आखिर तक नहीं पहुंचती तो इसका मतलब यह है कि आधी कारें आखिर तक नहीं पहुंची। शुरूआत में आप ऐसा उदाहरण ले सकते हैं जहां बराबर बंटवारा सम्भव हो। जैसेः अगर 10 गोलियां दो बच्चों में बराबर–बराबर बांटी जाएं तो दोनों को गोलियों का आधा–आधा भाग मिला। यानि 10 का आधा 5.

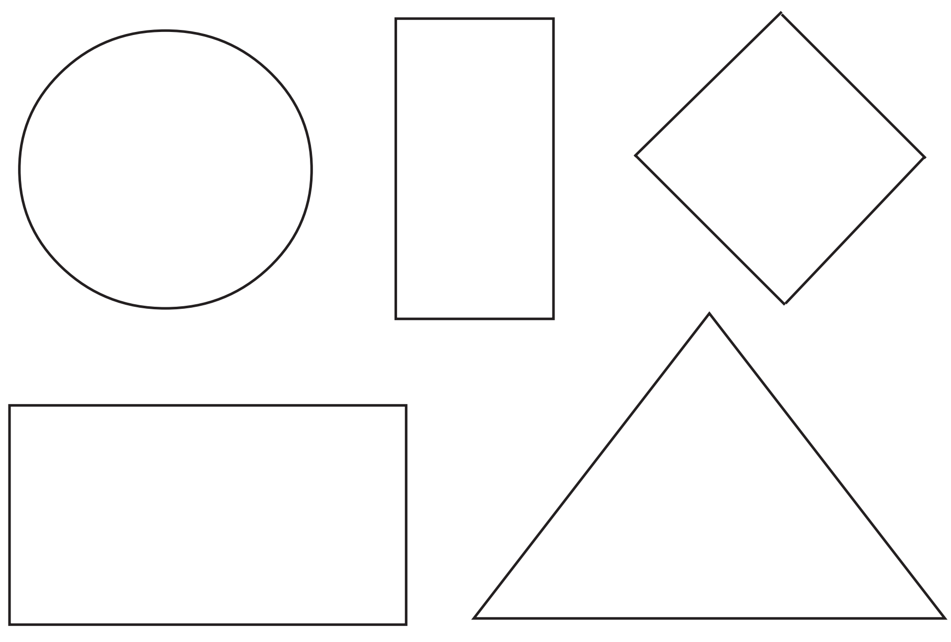
बच्चों से 6 या 8 या 12 शीशियों के ढक्कन या चॉक या कोई अन्य चीज़ लेने को कहें। अब उनसे कहें की आधी चीज़ें अलग करें। अब कितनी चीज़ें उनके पास हैं? इस पर उनसे चर्चा करें।

E 1) ऐसी दो और गतिविधियां बताइए जिनके द्वारा यह पता चल सके कि बच्चे सचमुच इस बात को समझ गए हैं कि किसी पूरे का आधा पता लगाने के लिए दो बराबर भाग करना जरूरी है।

$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ आदि की संकल्पना भी इसी तरह से पढ़ाई जा सकती है।

यहां कुछ गतिविधियों के सुझाव दिए गए हैं, जो शायद आपको उपयोगी लगें।

उदाहरण 4 : चित्र–8 में दिखाई गई किसी भी आकृति का कागज़ लें।



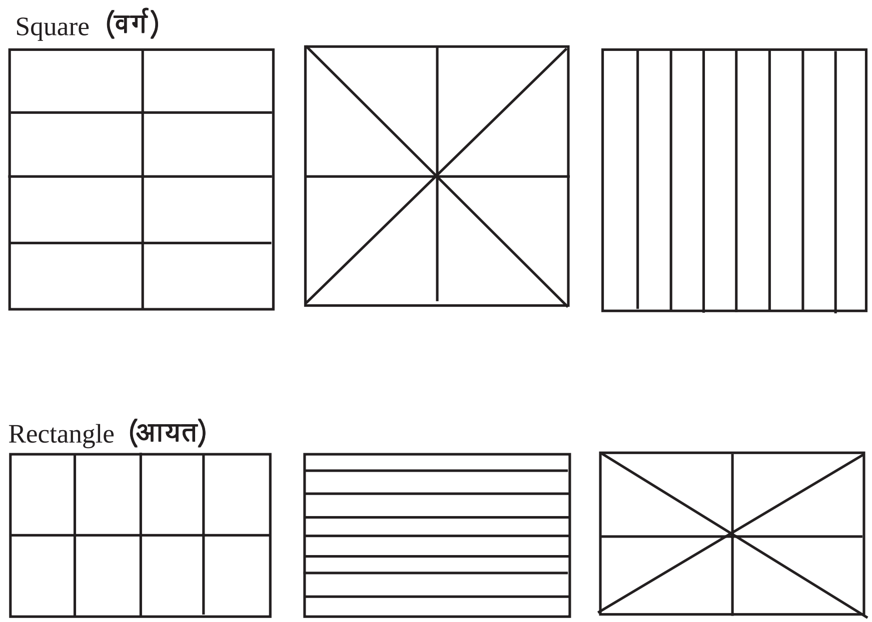
चित्र 8

इसे दो विपरीत किनारे मिलाते हुए मोड़ लें। मोड़ पर अच्छे से दबा लें। अब इसे वापिस खोल लें। आप देखेंगे कि एक रेखा कागज़ दो बराबर भागों में बंट गया है। अर्थात् एक–दूसरे के ऊपर रखे जाने पर ये भाग एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढंक लेंगे। प्रत्येक भाग पूरे का आधा है। अब कागज़ को इसी तरह एक बार और मोड़िए। कागज़ अब चार भागों में बंट जाएगा।

इस तरह आप बच्चों को $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, आदि से परिचित करा सकते हैं।

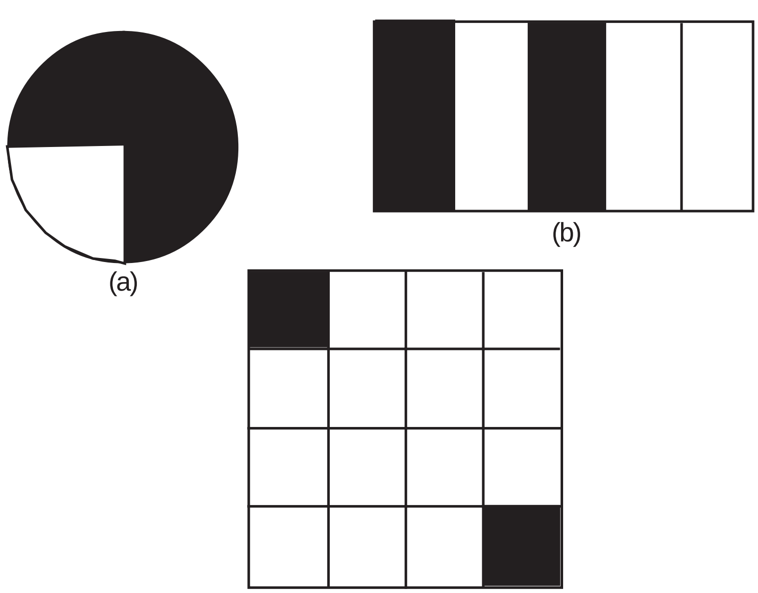
यह ध्यान रखें कि वर्ग और आयात को कई ढंगों से आठ भागों में बांटा जा सकता है। कुछ ढंग चित्र–9 में दिखाए गए हैं।

बच्चों को इस प्रकार की गतिविधियाँ आसान व रोचक लगतीं है। मगर इस गतिविधि द्वारा $\frac{1}{3}$, दिखा पाना शायद उनके लिए आसान न हो। यहां आप बच्चों की मदद कर सकते हैं। कागज़ को तीन बराबर भागों में मोड़ना सिखाकर आप फिर $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ आदि दिखा सकते हैं।



चित्र 9

अंकित हमारे पड़ोस में रहता है। वह गणित का सक्रिय छात्र है। वह गणित की कुछ समस्याएं लेकर मेरे पास आया था। अंकित चौथी कक्षा में पढ़ता है और उसे गणित में रुचि



चित्र 10

है। उससे बात करते हुए मुझे पता चला कि उनकी कक्षा में भिन्न संख्याओं का अभ्यास अभी–अभी पूरा हुआ है। तो मैंने सोचा कि क्यों न उससे कुछ प्रश्न करवाकर देखा जाए। मैंने कुछ आकृतियां बनाकर उससे पूछा कि प्रत्येक में छायादार भाग पूरे का कितना अंश है, भिन्न के रूप में लिखो (चित्र–10 देखें)।

इसका उत्तर था (क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{2}{5}$ तथा (ग) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

अंकित के उत्तरों के विषय में बताइए :

E 2) क) आपके विचार में अंकित की समस्या क्या थी?

ख) क्या यह बच्चों की आम समस्या है?

ग) आप उसकी मदद कैसे करेंगे?

E 3) कागज़ मोड़कर $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ दिखाने में आप बच्चे की मदद कैसे करेंगे?

E 4) क्या आप कोई ऐसी गतिविधि सुझा सकते हैं जिससे बच्चे को $\frac{1}{5}$ की संकल्पना समझने में मदद मिलें?

E 5) कक्षा में भिन्न पढ़ाने के अपने तरीके की सफलता का मूल्यांकन आप कैसे करेंगे?

ऊपर की गई चर्चा से आप समझ ही गए होंगे कि भाग को पूरे के संदर्भ में देख पाना बच्चों के लिए एक और उलझन का विषय साबित होता है। अगले खण्ड में हम इसी समस्या पर गौर करेंगे।

8.3 पूर्ण के भाग; पूर्ण एक भाग

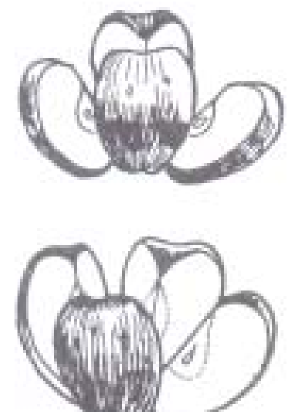
भिन्न को समझने में एक समस्या यह आती है कि इसे अलग से स्वतंत्र इकाई के रूप में नहीं देखा जा सकता । भिन्न का अर्थ तभी है जब उसे उस पूरे से जोड़कर देखा जाए जिसका वह भाग है। किसी चीज़ का भाग समझने से पहले आवश्यक है कि हम उस पूरी चीज़ को जानते हों जिसका वह भाग है। आप इस बात से तो सहमत होंगे कि तीन–चौथाई (पौन) का मतलब यह है कि किसी पूरे का चार बराबर भागों में बांटकर उनमें से तीन भाग लिए गए हैं। या यह भी हो सकता है कि किसी समूह में चार वस्तुएं या सदस्य थे जिनमें से तीन ले लिए गए हैं। या थोड़ा अलग रूप से देखने पर इसका अर्थ यह भी हो सकता है कि तीन पूरों को चार बराबर भागों में बांट दिया गया है। इन सारे तरीकों से परिणाम एक ही निकलेगा मगर ध्यान रखने की बात यह है कि ये अलग–अलग संकल्पनाएं हैं। इन्हें समझने में बच्चों को मार्गदर्शन की आवश्यकता होती है।

कुछ शिक्षकों व बच्चों के माता–पिता से बातचीत करके ऐसा लगता है कि जब केवल एक पूर्ण दिया जाए तो बच्चे 'भाग' व 'पूर्ण' की संकल्पना आसानी से समझ पाते हैं। मगर जब 'पूर्ण' चीज़ों का एक समूह हो, तो उन्हें इसके भाग लिखने में दिक्कत होती है। इस समस्या से निपटने का एक तरीका यह भी हो सकता है कि हम भागों की बात करते हुए हर बार उससे सम्बंधित पूर्ण का भी उल्लेख करें। सिर्फ चौथाई (पाव) कहने कहने के बजाय हम

सेब का चौथाई भाग, मीटर का चौथाई भाग, या बारह का चौथाई भाग आदि कहें। इसके अलावा भाग की संकल्पना की शुरूआत में हम चर्चा एक पूर्ण तक ही सीमित रखें।

भिन्न : पूर्ण के भाग के रूप में

इस संदर्भ में शिक्षक कक्षा में कुछ गतिविधियां करवा सकते हैं। यहां एक गतिविधि दी जा रही है जो एक कक्षा में की गई थी। निम्नलिखित स्थिति पर ग़ौर कीजिए।



चित्र 11

उदाहरण 5

शिक्षिका : यह एक सेब है जिसे चार बराबर भागों में काटा गया है। मैं जब इन चार टुकड़ों को एक साथ जोड़ती हूँ (दिखाते हुए), तो पूरा सेब बन जाता है। (चित्र–11 देखें)।

मोहन, यहां आकर एक टुकड़ा ले लो। तुम्हारे पास सेब का कितना भाग है?

मोहन : एक।

शिक्षिका : कितने भागों में से?

मोहन : चार में से एक भाग।

शिक्षिका : क्या तुम बता सकते हो कि तुम्हारे पास एक सेब का कितना भाग है?

मोहन : जी मैडम, मेरे पास एक सेब का चौथाई भाग है।

शिक्षिका : ठीक है। अब यह एक और टुक्ड़ा ले लो। अब बताओं तुम्हारे पास कितना सेब है?

मोहन : अब मेरे पास दो टुकड़े हैं।

शिक्षिका : कितने टुकड़ों में से?

मोहन : मेरे पास चार में से दो टुकड़े हैं।

शिक्षिका : तुम्हारे पास चार में से दो टुकड़े हैं। क्या तुम इस बात को आधे के रूप में बता सकते हो?

मोहन : जी मैडम, मेरे पास अब आधा सेब है।

शिक्षिका : एक और टुकड़ा लेकर बताओं कि अब तुम्हारे पास सेब का कितना भाग है?

मोहन : अब मेरे पास चार में से तीन टुकड़े हैं।

शिक्षिका : मतलब अब तुम्हारे पास सेब का तीन–चौथाई भाग है।

मोहन : जी मैडम।

शिक्षिका : मोहन के पास सेब के चार टुकड़ों में से तीन टुकड़े हैं। और इन चार टुकड़ों को जोड़ने से पूरा सेब बन जाता है। तो इस ढंग से हमें पूरे का तीन–चौथाई भाग मिलता है। यहां पूरे का मतलब है एक सेब।

———X———

इसके बाद शिक्षिका ने सारे बच्चों को कागज़, ब्रेड, बिस्कुट, चपाती जैसी अलग–अलग चीज़ों, जो भी कक्षा में उपलब्ध थीं, के साथ तरह–तरह की गतिविधियां करवाईं। इन चीज़ों की मदद से उन्होंने सारे बच्चों को $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ दिखाया। बीच–बीच में उन्होंने बच्चों से प्रश्न पूछे। बच्चों से सारे प्रश्नों के उत्तर मिल जाने के बाद वे काफी संतुष्ट नज़र आ रहीं थीं।

जैसा कि हमने पहले जिक्र किया था कि जब 'पूर्ण' कई वस्तुओं का एक समूह होता है, तब बच्चें को उसके भागें को उस पूर्ण से जोड़कर देखने में समस्या होती है। इसलिए यह आवश्यक है कि हम छात्रों को विभिन्न तरह के 'पूर्ण' से परिचित कराएं। जब हमें यकीन हो जाए कि बच्चे एक ही वस्तु से बने 'पूर्ण' के संदर्भ में 'अंश–पूर्ण' सम्बंध को भलीभांति समझ चुके हैं, तब हम अन्य तरह के 'पूर्ण' की भी चर्चा कर सकते हैं।

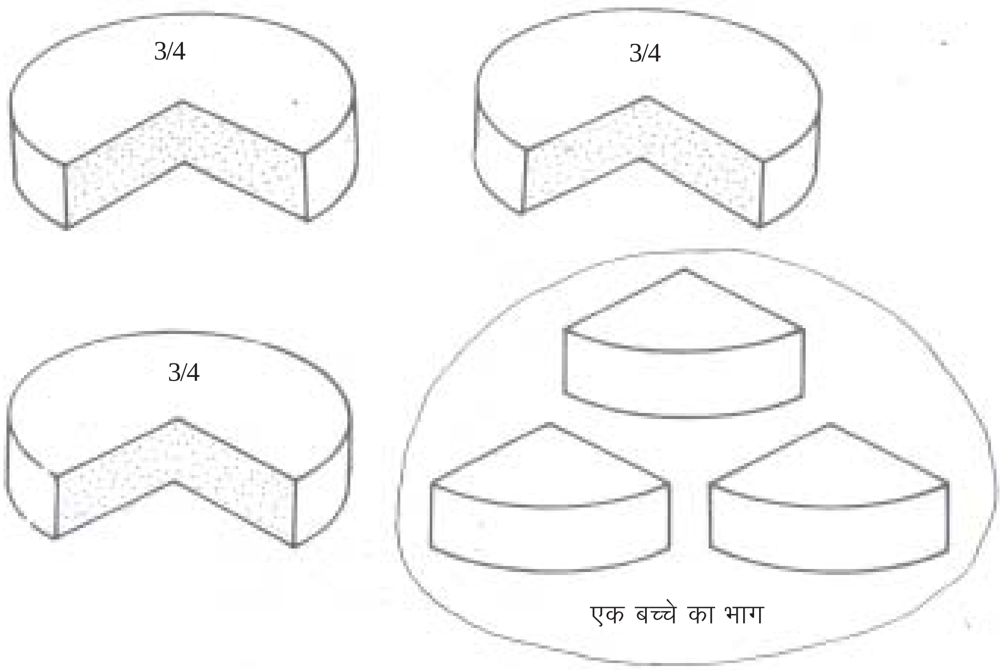
आइए एक बार फिर एक पूर्ण के तीन–चौथाई की समस्या को उठाते हैं। हम देखने की कोशिश करेंगे कि छात्रों को कितनी तरह के 'पूर्ण' से परिचित कराया जा सकता है।

1. एक 'पूर्ण' जिसमें एक से ज़्यादा मगर चार में कम वस्तुएं हों।

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 3 \times \frac{1}{4}$$

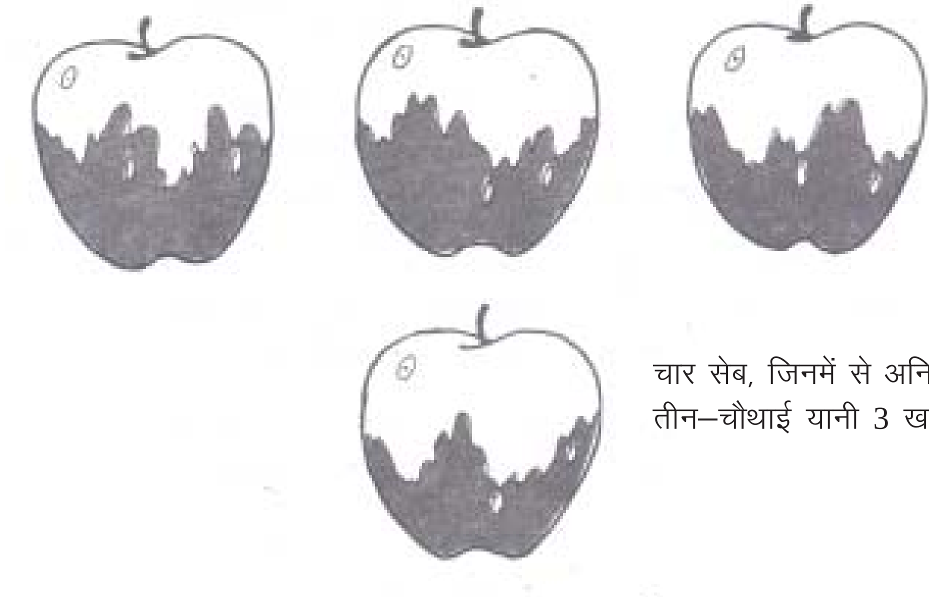
$$= 3 \div 4$$



चित्र 12

तीन केक, चार बच्चों में बराबर–बराबर बांटना

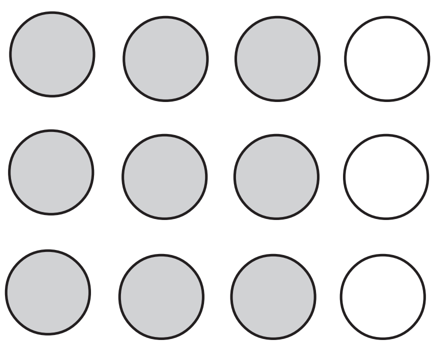
2. चार चीज़ों से बना 'पूर्ण'



चार सेब, जिनमें से अनिल तीन–चौथाई यानी 3 खाएगा

चित्र 13

3. चार में ज़्यादा चीज़ों से बना 'पूर्ण' जिसमें चीज़ों की कुल संख्या चार से विभाजित हो।



बारह कंचे, जिनमें से तीन–चौथाई यानी नौ काले हैं।

चित्र 14

शिक्षक ऊपर बताए गए सभी तरह के पूर्ण लेकर अपनी कक्षा में गतिविधियां करवा सकते हैं। यहां हम एक गतिविधि दे रहें हैं। निम्नलिखित स्थिति पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 6

शिक्षिका कक्षा में कुछ टाफियां और बिस्कुट लेकर आई और बच्चों से बातचीत शुरू करते हुए उन्होंने मोहन को अपने पास बुलाया।

शिक्षिका : ये चार बिस्कुट हैं। मैंने मोहन को तीन बिस्कुट दे दिए। उसके पास कितने बिस्कुट हैं?

छात्र : तीन बिस्कुट।

शिक्षिका : कितने में से?

छात्र : चार में से।

शिक्षिका : मोहन, क्या तुम बोर्ड पर लिख सकते हो कि बिस्कुटों का कितना भाग तुम्हें मिला?

मोहन : जी हां, मैडम। (वह बोर्ड पर $\frac{3}{4}$ लिखता है।)

शिक्षिका : तो क्या हम कह सकते हैं कि माहेन के पास बिस्कुटों का तीन–चौथाई भाग है?

छात्र : जी हां, मैडम।

शिक्षिका : यानि इस उदाहरण में तीन–चौथाई का मतलब हुआ चार में से तीन बिस्कुट।

क्या तुम बता सकते हो कि यहां 'पूर्ण' क्या है ?

(कक्षा में थोड़ी देर चुप्पी रहती है।)

एक लड़का : बिस्कुट।

शिक्षिका : कितने बिस्कुट?

लड़का : चार बिस्कुट।

सभी छात्र : जी हां, मैडम।

शिक्षिका : शाबाश ! यानी यहां हमारा पूर्ण चीज़ों का एक समूह है जिसमें चार बिस्कुट हैं। अब शिक्षिका ने पांच टाफियां उठाई और रेणु को उसमें से दो दे दीं। फिर उन्होंने ऊपर की गई गतिविधि दोहराई। उन्होंने बच्चें से कई सवाल पूछे। बच्चों को अब यह ठीक से मालूम था कि यहां पूर्ण का मतलब पांच टाफियां हैं। इसके बाद अभ्यास के लिए उन्होंने बच्चों को कुछ प्रश्न हल करने को दिए।

———x———

इस तरह से छात्रों को विभिन्न पूर्ण से परिचित कराया जा सकता है।

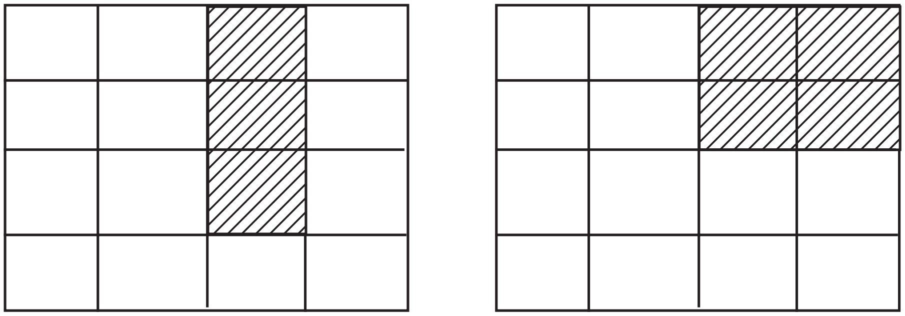
E 6) ऊपर वर्णित सभी पूर्ण के संदर्भ में एक–एक गतिविधि बताइए।

8.4 भिन्न द्वारा एक भाग का निरूपण

एक दिन मैं अपनी भतीजी अंकिता और उसकी सहेली रमा से बातचीत कर रही थी। दोनों कक्षा चार में पढ़ती हैं। तभी मुझे याद आया कि मेरी एक शिक्षिक मित्र ने कहा था कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन में समस्या आती है। मैंने सोचा कि क्यों न इन दो बच्चों पर परीक्षण किया जाए। निम्नलिखित स्थिति देखिए।

उदाहरण 7

मैं : हर आकृति में छायादार भाग किस भिन्न को दिखाता है?



15(क) **15(ख)**

चित्र 15

अंकिता : 15 (क) में छायादार भाग तीन बटा सोलह है और 15 (ख) में चार बटा सोलह है।

रमा : 15 (क) में तीन बटा सोलह है और 15 (ख) में एक–चौथाई।

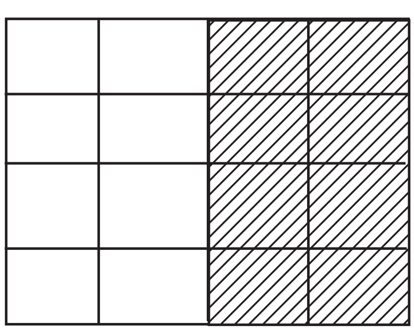
ये काफी दिलचस्प उत्तर थे। मैंने सोचा कि भिन्नों के प्रतीकन के बारे में रमा की समझ को और गहराई से आंकना चाहिए।

मैं : रमा, तुमने ऐसा क्यों कहा कि 1 (ख) में छायादार भाग एक चौथाई है?

रमा : (हिचकिचाते हुए) क्योंकि .... पूरे कागज़ पर सोलह हैं और हर तरफ .... हर एक .... में चार हैं। यदि आप इसे काटेंगे तो (हर बार चार–चार वर्गों के समूह की ओर इशारा करते हुए) यह एक चौथाई है, यह एक चौथाई है, यह एक चौथाई है, और यह एक चौथाई है।

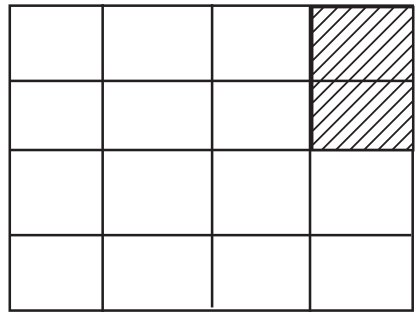
परन्तु उसे देखकर मेरे मन में शंका पैदा हुई। जब उसने यह कहा कि "हर एक में चार हैं........... हर तरफ" तो उसके हावभाव से लग रहा था कि वह घेरे के अन्दर के चारों आयतों को गिन रही थी। मुझे शंका यह हुई कि क्या वह यह कह रही है कि घेरेदार भाग एक चौथाई है क्योंकि उसमें चार आयत हैं यह वह कह रही है कि यह एक चौथाई है क्योंकि पूरे कागज़ पर बराबर साइज़ के ऐसे चार भाग हैं। मेरा शक तब सही साबित हो गया जब रमा और अंकिता ने यह बताया कि कोई भाग आठवां भाग कब होता है।

रमा : यह आठवां भाग है क्योंकि इसमें आठ आयत हैं।



चित्र 16

अंकिता :नहीं, आठवां भाग यह है क्योंकि पूरे को ऐसे आठ भागों में बांटा जा सकता है।



चित्र 17

यानी किसी भिन्न का प्रतीकन करना और उसे संकेतों में व्यक्त करना बच्चों के लिए और बड़ी समस्या है।

E 7) ऊपर दिए गए चित्रों व व्याख्याओं में से कौन सी सही है? सही हल पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए आप क्या करेंगे?

यह बहुत आवश्यक है कि भिन्नों के प्रतीकन के तरीके को लेकर अगर बच्चे के दिमाग में कोई भ्रम है तो उसे दूर किया जाए। उसके बाद ही इस विषय में आगे बढ़ना चाहिए। जब बच्चे 'आधा', 'तिहाई', 'चौथाई' जैसे भिन्नो के नाम से सुपरिचित हो जाएं और इन शब्दों को सम्बंधित पूर्ण (मसलन केक का एक तिहाई आदि) के संदर्भ में समझने लगें तब वो भिन्नों के संकेत सिखाने के लिए तैयार हो जाते हैं। ऐसा देखा गया है कि हम आम तौर पर उन्हें बता देते हैं कि 'दो तिहाई' लिखने के लिए वे 2 के नीचे एक लाइन खींचकर उसके नीचे तीन इस प्रकार $\frac{2}{3}$ लिख दें मगर यह नहीं समझते कि हम ऐसे क्यों लिख रहे हैं। बच्चे कई बार भ्रमित हो जाते हैं और दो तिहाई को $\frac{3}{2}$ लिख देते हैं। हमें उनको यह समझाना चाहिए कि लाइन के नीचे की संख्या (हर) से पता चलता है। कि पूर्ण को कुल कितने भागों में बांटा गया है जबकि ऊपर की संख्या (अंश) से पता चलता है कि हम उनमें से कितने भागों को ले रहे हैं। जैसेः भिन्न $\frac{2}{3}$ से पता चलता है कि पूर्ण को कुल तीन बराबर भागों में बांटा गया है और हम उनमें से दो भाग ले रहे हैं। भिन्न $\frac{2}{3}$ के हर से हमें 'तिहाई' शब्द मिलता है और अंश से पता चलता है कि कितनी तिहाइयों पर ध्यान दिया जाता है।

भिन्नों को संख्या के रूप में लिखने पर हमें जोर देना चाहिए। दिए गए भिन्न की संगत संख्या लिखने में आप बच्चों की मदद कर सकते हैं। उदाहरण के लिए एक कागज़ को दो बराबर टुकड़ों में बांटा जाता है। इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़े को संख्या $\frac{1}{2}$ से व्यक्त किया जाता है। इस तरह बच्चे संख्या व भिन्न के आपसी सम्बंध को प्रत्यक्ष रूप में देख व समझ सकते हैं।

इसी प्रकार बच्चों को भिन्न के प्रतीकन को संकेतों में बदलने का भी अभ्यास कराना आवश्यक है। मेरा अनुभव यह है कि प्रारम्भ में उन्हीं भिन्नों पर ध्यान देना अच्छा रहता है

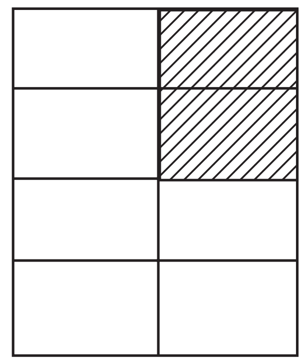
जिनमें अंश '1' हो। इससे बच्चों का ध्यान हर के महत्व पर केन्द्रित करने मे मदद मिलती है। बच्चों को निम्नलिखित तालिका भरने के लिए कहा जा सकता है :

पूर्ण के बराबर भागों की संख्या	2	3	4	5	6
हर भाग का प्रतीकन	आधा	तिहाई	चौथाई	–	–
एक भाग का संकेत	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–

धीरे–धीरे बच्चे विभिन्न 'अंश' से सम्बंधित अभ्यास/गतिविधियां कर सकते हैं।

E 8) क्या आप कक्षा में 40 बच्चों के लिए कोई ऐसी गतिविधि सुझा सकते हैं जिससे यह पता लग सके कि भिन्नों के प्रतीकन और संकेत की संकल्पना वे समझ गए हैं या नहीं?

बच्चों के सामने ऐसे उदाहरण कई बार आते हैं जब एक ही भिन्न को एक से अधिक ढंग से व्यक्त किया जा सकता है। जैसे– कई बच्चे कहेंगे कि चित्र–4 में $\frac{2}{8}$ भाग छायादार है जबकि अन्य बच्चे कहेंगे कि छायादार भाग $\frac{1}{4}$ है।



चित्र 18

दोनों ही उत्तर सही हैं। मगर कई बार बच्चे इस बात को आसानी से स्वीकार नहीं कर पाते कि अलग–अलग भिन्न एक ही मात्रा या बराबर भागें को निरूपित कर सकते हैं। जैसे $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$.........एक ही मात्रा को निरूपित करते हैं। इस तरह ये भिन्न परस्पर तुल्य या बराबर हैं। इस संकल्पना को समझने में बच्चों को काफी अभ्यास और समय की जरूरत होती है।

इस संदर्भ में मैं अपना अनुभव आपको बताना चाहूंगी। एक बार में मुझे अपने पड़ोस के 4 बच्चों से संपर्क का मौका मिला। सभी बच्चे 8 से 10 उम्र के थे। मैं उन्हें पास की दुकान में कुछ खिलाने ले गई। सभी बड़ी पेस्ट्री खाना चाहते थे। हमारे बीच बातचीत कुछ इस प्रकार चली।

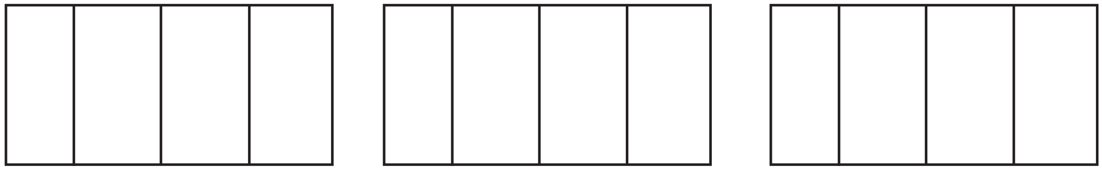
उदाहरण 8

मैं : अगर मैं 3 पेस्ट्री खरीदूं, तो तुम लोग उन्हें आपस में बराबर–बराबर कैसे बांटोगे?

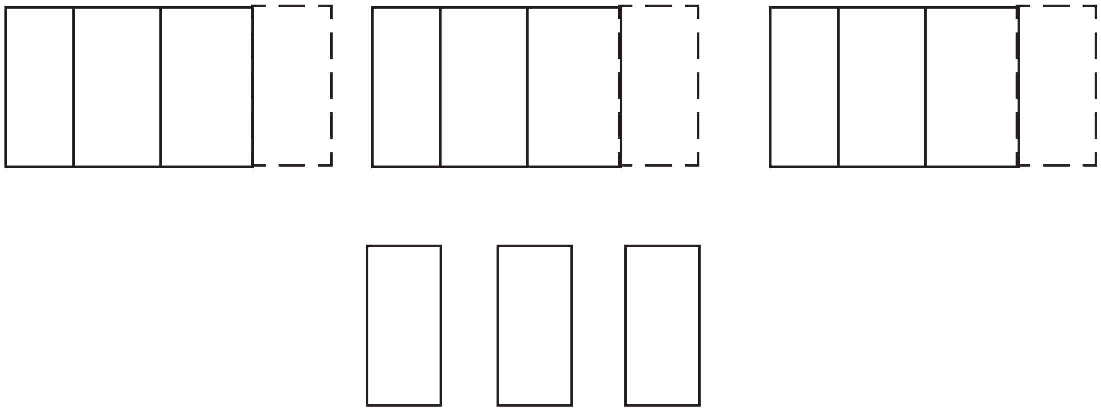
एक बच्चा : मैं हर एक पेस्ट्री के चार बराबर टुकड़े करके सबको हर पेस्ट्री एक–एक टुकड़ा दे दूंगा। तो हम सबको बराबर–बराबर पेस्ट्री मिल जाएगी।

दूसरा बच्चा : नहीं, मैं पहले एक–एक पेस्ट्री तीन लोगों को दे दूंगा। फिर इन तीनों से कहूंगा कि वे चौथे को अपनी–अपनी पेस्ट्री का चौथाई भाग दे दें। तब हम सबको बराबर भाग मिल जाएगा।

मैं : ठीक। तुम दोनों ने 3 पेस्ट्री को चार बराबर–बराबर भागों में इस तरह बांटा (चित्र 19 एवं 20)



चित्र 19



चित्र 20

क्यों न सब लोग जरा लिख कर बताएँ कि हर एक को पेस्ट्री का कितना भाग मिलेगा?

पहला बच्चा : हर एक को $\frac{1}{4}$ मिलेगा।

दूसरा बच्चा : हर एक को $\frac{3}{4}$ मिलेगा।

तीसरा बच्चा : हर एक को $\frac{3}{12}$ मिलेगा।

? आप इन बच्चों के उत्तरों के बारे में क्या कहेंगे? कौन सही था और कौन गलत, और क्यों? ऊपर लिए गए उदाहरण में पहले बच्चे ने तीन पेस्ट्रियों को एक 'पूर्ण' के रूप में देखा, इसलिए उसे इसका $\frac{1}{4}$ मिला। दूसरे बच्चे के लिए पूर्ण का अर्थ तीन अलग–अलग पेस्ट्रियां थीं और उसका भाग इन तीन पेस्ट्रियों को $\frac{1}{4}$ था। तीसरे बच्चे ने भी तीन पेस्ट्रियों को एक 'पूर्ण' के रूप में देखा, जिसे 12 बराबर भागों में बांटा गया था और उसे इनमें से तीन भाग मिले थे।

ऊपर दिए गए उदाहरण के बाद आप इस बात से तो सहमत होंगे कि बच्चों के लिए यह समझना ज़रूरी है कि भिन्न को नाम देते वक्त 'पूर्ण' का उल्लेख अनिवार्य है। एक बार वे इस बात को समझ गए तो उन्हें एक ही मात्रा को अलग–अलग भिन्न संख्याओं के रूप में व्यक्त करने में कोई समस्या नहीं होगी।

प्रारम्भ में, कोई औपचारिक नाम बताए बगैर, हम उनसे कह सकते हैं कि वे थोड़ी खोज करके यह तो पता लगाएं कि किसी भिन्न के कितने और नाम हो सकते हैं। मगर यह जासूसी थोड़े व्यवस्थित ढंग से करनी होगी। प्रारम्भ निम्नलिखित गतिविधि से की जा सकती है।

उदाहरण 9

कागज़ की एक पट्टी लेकर उसे आठ भागें में मोड़ दीजिए। अब बच्चों से कहिए कि आधी पट्टी को अलग–अलग नाम दें। उन्हें ये पता लगाने दीजिए कि पट्टी का $\frac{1}{2}$ वही है जो पट्टी का $\frac{2}{4}$ है या $\frac{4}{8}$ है। इसी प्रकार से एक वर्ग को आठ भागों में मोड़कर पता लगा सकते हैं कि वर्ग का $\frac{1}{2}$ ही वर्ग का $\frac{2}{4}$ और वर्ग का $\frac{4}{8}$ भी होता है। अब इस समय आप आधे, दो–चौथाई, चार–आठवें की तुल्यता (समानता) समझा सकते हैं। और लिख सकते हैं कि $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ जिसका अर्थ है कि एक–आधा और दो–चौथाई बराबर हैं। अब आप बच्चें से कहें कि वे अपने निष्कर्ष को निम्नानुसार लिखकर बताएं:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$

बच्चे इस सूची का अध्ययन करके अंश व हर का क्रम देख सकते हैं। खासकर वे यह देख सकते हैं कि प्रत्येक भिन्न में हर, अंश से दुगना है। आप बच्चों से इसी क्रम का पालन करने वाली अन्य भिन्न संख्याएं बताने को कह सकते हैं। शुरूआत करने के लिए आप अपनी ओर से $\frac{6}{12}$ का सुझाव दे सकते हैं।

———x———

इस प्रकार एक बार बच्चों को दिए गए भिन्न के तुल्य भिन्न खोजने का काफी अनुभव हो जाए और वे हर बार तुल्य भिन्नों के बीच के क्रम को देख समझ लें तो वे खुद ब खुद तुल्य भिन्न लिखने का नियम यानि **अंश व हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करना या दोनों को उनके गुणनखण्ड से भाग देना खोज लेंगे।**

E 9) एक–एक गतिविधि ऐसी सुझाइए जिसकी मदद से बच्चों को एक तिहाई, एक–चौथाई और दो–तिहाई के तुल्य भिन्न पता करने में मदद मिले।

यहां एक और गतिविधि हम दे रहे हैं जिसमें शिक्षिका ने अपनी कक्षा में उपलब्ध विभिन्न प्रत्यक्ष वस्तुओं का प्रयोग तुल्य भिन्न की संकल्पना समझाने में किया है।

उदाहरण 10

शिक्षिका : मेरे पास 32 कंचे हैं। मैं मोहन और सोहन को 16-16 कंचे दे रही हूं।

मोहन, इन 16 कंचों को 4 बराबर भागों में बांटो।

मोहन : (इस तरह बांटकर शिक्षिका को दिखाता है)

○○ ○○ ○○ ○○
○○ ○○ ○○ ○○

ये चार बराबर भाग हो गए।

शिक्षिका : हर ढेर में कितने कंचे हैं?

मोहन : चार कंचे हैं।

शिक्षिका : एक ढेर कंचों का कितना भाग है?

मोहन : यह 16 कंचों का $\frac{1}{4}$ है।

शिक्षिका अब एक अन्य छात्रा रानी को बुलाती है।

शिक्षिका : मोहन, चार में दो ढेर रानी को दे दो।

मोहन : जी, मैडम। (00 00 / 00 00) यानी दो ढेर रानी को दे देता है।)

शिक्षिका : मोहन, यह बताओं कि रानी को तुमने कंचों का कितना भाग दिया है?

मोहन : मैंने उसे सोलह कंचों का $\frac{2}{4}$ दिया है।

शिक्षिका : शाबाश ! सोहन, अब तुम अपने 16 कंचों के 8 बराबर भाग करो।

सोहन : (00 00 00 00 00 00 00 00 के रूप में बांटता है)

तब शिक्षिका ने उससे इस तरह के प्रश्न पूछे कि हर भाग में कितने कंचे हैं?, एक ढेर कंचों को कितना भाग है? आदि। इसके बाद उन्होंने रीता नाम की एक छात्रा को बुलाकर सोहन से कहा कि वह उसे 8 भागें में से चार ढेर दे दे। सोहन ने (00 00 00 00) 4 ढेर रीता को दे दिए।

शिक्षिका : सोहन, यह बताओ कि तुमने रीता को कंचों का कितना भाग दिया है?

सोहन : मैंने उसे 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ है।

शिक्षिका : ठीक है। यानी रानी को 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ मिला और रीता को 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ मिला। तुम दोनों के पास कितने–कितने कंचे हैं (रानी और रीता से प्रश्न)?

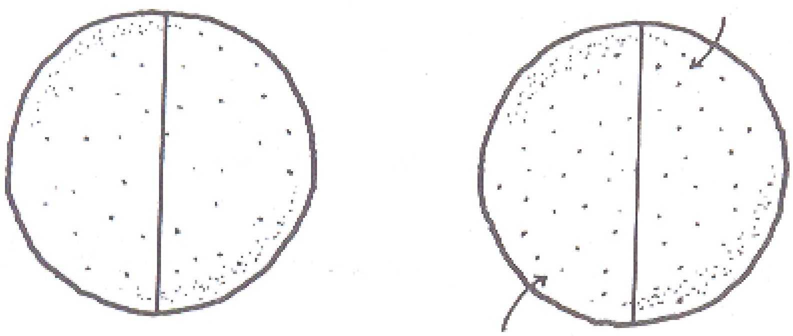
रानी : मैडम, आठ कंचे।

रीता : मुझे भी आठ कंचे।

शिक्षिका : क्या इसका अर्थ यह हुआ कि 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ और $\frac{4}{8}$ बराबर होता है?

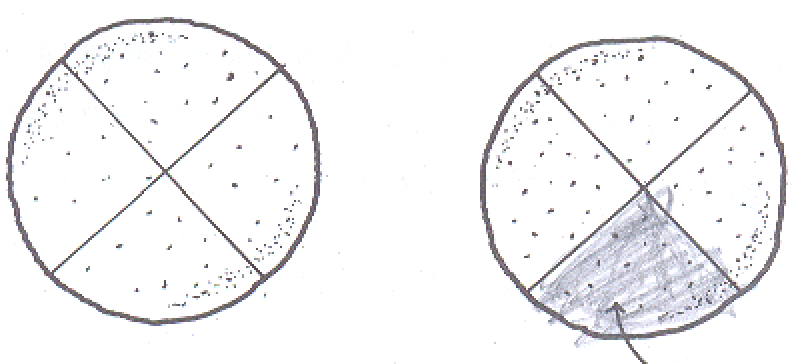
पूरी कक्षा : जी हां, मैडम।

शिक्षिका : बिल्कुल सही। अन्तर सिर्फ इतना है कि उनके समूह अलग–अलग ढंग से बनाए गए हैं। इसी तरह से वे यह भी समझाती हैं कि यदि दो चपातियों को चार बराबर टुकड़ों में बांटा जाए। (चित्र 20)



चित्र 20

तो 2 चपाती का $\frac{2}{4}$ एक पूरी चपाती होगा। और यदि 2 चपातियों को 8 भागों में बांटा जाए (चित्र 7)



चित्र 21

तो 2 चपाती का $\frac{4}{8}$ भी एक पूरी चपाती होगा। यानी 2 चपाती का $\frac{2}{4}$ वही है जो 2 चपाती का $\frac{4}{8}$ ।

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह समझ पाएंगे कि पूर्ण कुछ भी हो, मगर दो–चौथाई निसंदेह रूप से चार–आठवें या छः–बारहवें के बराबर होता है।

E 10) क्या आप सहमत हैं कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को भिन्न की तुल्यता की संकल्पना समझने में मदद मिलती है? यदि हां, तो क्यों? यदि नहीं, तो आपका क्या सुझाव है?

क्या आपने कभी बच्चों को एक भिन्न देकर उसके तुल्य भिन्न लिखने को कहा है? मैंने यह प्रयोग किया है और पाया है कि बच्चे आम तौर पर गुणा का तरीका अपनाते हैं। यादि वे अंश और हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करने का तरीका अपनाते हैं। अंश और हर के गुणनखंड से भाग देने का तरीका उन्हें कठिन लगता है। कई अन्य लोगों से मैंने बात की। वे भी इससे सहमत हैं। उनका यह भी कहना है कि शायद इसी वजह से किसी भिन्न को उसके लघुतम पद में लिखने में बच्चों को समस्या होती है। इस मामले में शायद आपमें से कई के अनुभव वैसे ही रहे होंगे जैसे मेरे अपनी भतीजी अंकिता के साथ रहे हैं। अंकिता चौथी में पढ़ती है। एक दिन हम भिन्न पर चर्चा कर रहे थे।

उदाहरण 11

मैं : क्या तुम $\frac{8}{12}$ के तुल्य कोई भिन्न बता सकती हो?

अंकिता : हां।

वह याद करने की कोशिश करने लगी। खुद से बात कर रही थी।

अंकिता : शिक्षिका ने क्या बताया था? हां, याद आया। 2 से गुणा करके $\frac{16}{24}$ मिलेगा, 3 से गुणा करके $\frac{24}{36}$ मिलेगा, 4 से गुण करके $\frac{32}{48}$ मिलेगा। इस तरह से मैं $\frac{8}{12}$ के बराबर कई भिन्न लिख सकती हूँ।

मैं : बढ़िया। सही बताया तुमने। अब यह बताओ कि क्या $\frac{2}{3}$ भी $\frac{8}{12}$ के बराबर है?

अंकिता : अभी करके देखती हूँ, आण्टी।

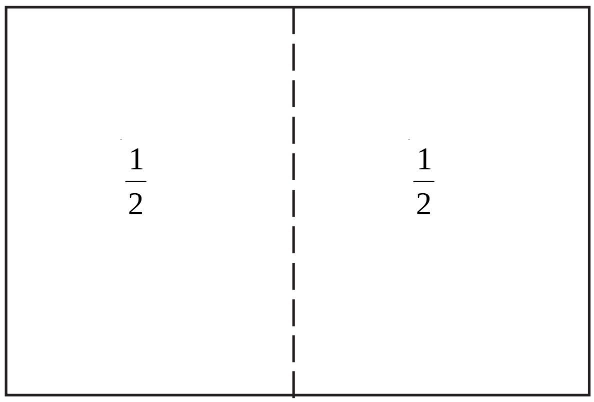
मैं उसे ध्यान से देख रही थी। मैंने देखा कि यहां भी वह गुणा के तरीके का उपयोग कर रही थी। उसने $\frac{2}{3}$ (अंश व हर दोनों) को 2 से गुण किया। इससे बात नहीं बनी। फिर उसने 3 से गुणा किया पर बात नहीं बनी। तब उसने 4 से गुणा किया और चीख पड़ी

अंकिता : हां आण्टी। $\frac{2}{3}$ भी $\frac{8}{12}$ के बराबर है। हम 2 को 4 से और 3 को भी 4 से गुणा करें तो $\frac{8}{12}$ आता है।

मैं : मगर इसका ज़्यादा आसान तरीका है। तुम्हें पता है कि 8 और 12 का एक सामान्य गुणनखण्ड 4 है। तो बस, 8 को 4 से भाग दे दो और 12 को 4 से भाग दे दो और $\frac{2}{3}$ मिल जाएगा।

अंकिता : हां.......... लगता तो आसान है मगर क्या ऐसे कर सकते हैं?

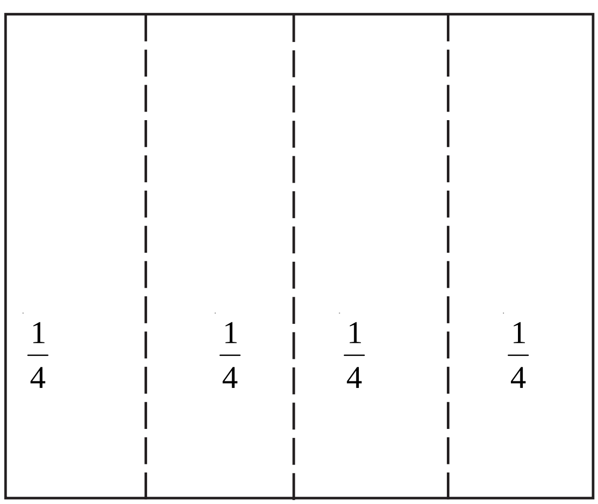
मैं : क्यों नहीं? चलो, तुमको एक चीज़ दिखाती हूँ। यह कागज़ देखो। इसे मोड़ दिया। ये दो बराबर भाग हो गए (चित्र 22 देखें)। बताओ, प्रत्येक भाग कितना भाग है?



चित्र 22

अंकिता : $\frac{1}{2}$ ।

मैं : एक बार और मोड़ दें तो चार बराबर भाग हो जांएगे। (चित्र 23 देखें) अब कागज़ कितने भागें में बंट गया?



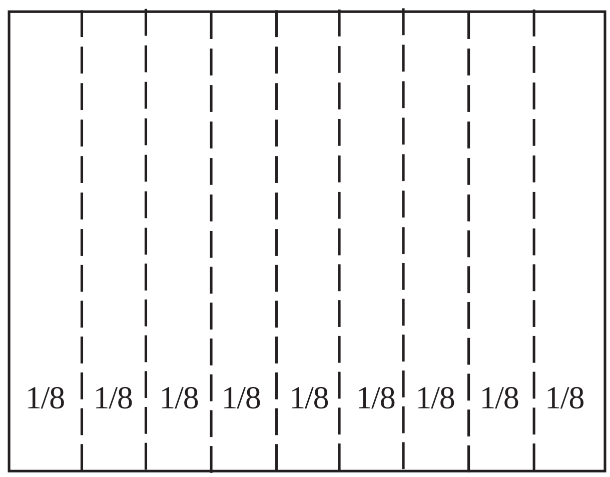
चित्र 23

अंकिता : चार भागों में। हर भाग $\frac{1}{4}$ है।

मैं : अब मैं कागज़ को खोल देती हूं। क्या तुम यह मानती हो कि $\frac{1}{2}$ कागज़ 2 एक–चौथाई भागों के बराबर है?

अंकिता : हां।

मैं : तो $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ लिख सकती हूँ। अब यदि मैं इस कागज़ को एक बार और मोड़कर खोल दूं तो यह ऐसा दिखेगा (चित्र 24)।



चित्र 24

अब बताओ कि कागज़ के $\frac{1}{2}$ भाग में कितने आठवें भाग हैं।

अंकिता : एक, दो .... चार। चार भाग है।

मैं : यानी $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

अंकिता : हां।

मैं : क्या अब हम कह सकते हैं कि $\frac{4}{8}$ और $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ के तुल्य है ? क्या हम ऐसे लिख सकते हैं

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ?$$

अंकिता : हां, ऐसा लिख सकते हैं।

मैं : अर्थात $\frac{4}{8}$ के तुल्य भिन्न हम निम्न अंश और हर के साथ लिख सकते हैं।

जब हम $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ लिखते हैं तो क्या तुम्हें कोई क्रम दिखाई पड़ता है?

अंकिता : जी हां मैडम। बांए से दांए चलते हुए हम अंश और हर दोनों को दो–दो से भाग देते जा रहे हैं।

मैं : क्या इसका यह हुआ कि हमें दो से भाग देते हुए एक–एक कदम ही चलना पड़ेगा। क्या हम सीधे $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ नहीं लिख सकते?

अंकिता : क्यों नहीं? यदि हम 4 और 8 को सीधे 4 से भाग दे दें तो $\frac{1}{2}$ आ जाएगा।

मैं : क्या अब तुम मानती हो कि तुल्य भिन्न लिखने के लिए हम अंश व हर दोनों को उनके सामान्य गुणनखंड से भाग दे सकते हैं?

अंकिता : जी आण्टी।

मुझे खुशी थी कि अंकिता का संदेह दूर हो चुका था और उसे मेरे साथ गतिविधि करने में मजा भी आया था। इसके बाद मैंने उसे $\frac{5}{10}=\frac{\square}{2}$, $\frac{14}{56}=\frac{2}{\square}$ आदि में रिक्त स्थानों में अंक भरने के अभ्यास करवाए। अंकिता ने इन्हें सही–सही कर दिया। मैंने मौके का फायदा उठाकर उसे यह भी समझा दिया कि जब हम $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ लिखते हैं तो $\frac{1}{2}$ लघुतम रूप है क्योंकि अब अंश और हर का कोई सामान्य गुणनखण्ड नहीं है। इसलिए अब हम इन्हें और विभाजित नहीं कर सकते।

—————x—————

अब इसी से सम्बंधित एक अभ्यास आपके लिए।

E 11) आप किस तरीके से पता करेंगे कि अंश और हर को उनके गुणनखंड से विभाजित करके तुल्य भिन्न पता करने की विधि आपके छात्र समझ गए है या नहीं?

आपने देखा होगा कि बच्चे कभी–कभी पूछते हैं कि तुल्य भिन्न पता करने के लिए हम जिस तरह से अंश व हर में गुणा या भाग करते हैं, उसी तरह अंश और हर दोनों में एक ही संख्या जोड़ या घटाकर तुल्य भिन्न क्यों पता नहीं कर सकते? ऐसे प्रश्नों के उत्तर बच्चों को खुद ही खोजने को कहना चाहिए। उनसे कहिए कि वे एक भिन्न संख्या लिखें। मसलन $\frac{1}{2}$ और उसमें अंश और हर दोनों में 2 जोड़कर देखें कि क्या $\frac{1}{2}=\frac{1+2}{2+2}=\frac{3}{4}$ होता है?

E 12) बच्चों को यह समझाने के लिए आप क्या करेंगें कि $\frac{5}{6}, \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$ के बराबर नहीं है?

बच्चों को यह समझने में भी समस्या आती है कि $\frac{4}{4} = 1$ या $\frac{5}{5} = 1$. निम्नलिखित उदाहरण से आपको यह बात बच्चों को समझाने में मदद मिलेगी।

उदाहरण 12

शिक्षिका : यह एक सेब है। मैं इसके चार बराबर भाग करती हूं। अगर इन चारों भागें को एक साथ रखें तो पूरा सेब बनता है। रेणु यहां आकर एक टुकड़ा ले लो।

रेणु : जी मैडम।

शिक्षिका : सेब का कितना भाग तुम्हें मिला?

रेणु : एक भाग।

शिक्षिका : कितने भागों में से?

रेणु : चार में से एक भाग।

शिक्षिका : इसे बोर्ड पर लिख दो।

रेणु : $\frac{1}{4}$

इसी तरह से शिक्षिका ने रेणु को दूसरा व तीसरा भाग दिया और बोर्ड पर $\frac{2}{4}$ व $\frac{3}{4}$ लिखवाया। आखिर में चौथा भाग भी रेणु को दे दिया।

शिक्षिका : सेब के कितने भाग तुम्हारे पास हैं?

रेणु : चार भाग।

शिक्षिका : कितने भागों में से चार भाग तुम्हारे पास हैं?

रेणु : 4 में से 4।

शिक्षिका : क्या इसके लिए हम भिन्न $\frac{4}{4}$ लिख सकते हैं?

रेणु : जी मैडम।

शिक्षिका : ठीक। तो बच्चों यह बताओं कि रेणु के पास कितना सेब हैं?

छात्र : पूरा/एक/समूचा।

शिक्षिका : तो क्या हम $\frac{4}{4}=1$ लिख सकते हैं?

छात्र : जी, मैडम।

शिक्षिका : इसी प्रकार से $\frac{5}{5}=1,\ \frac{6}{6}=1$ वगैरह होते हैं। ऊपर की गई गतिविधि कागज़ को चार बराबर भागों में काटकर या फिर चार कंचों आदि के साथ भी की जा सकती है।

एक बार बच्चे यह समझ गए कि $\frac{4}{4}=1,\ \frac{5}{5}=1$ आदि होते हैं, तो उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी कि 5 चौथाई भाग $\left(\frac{5}{4}\right)$ वह भिन्न है जो 1 से ज़्यादा है। यदि एक कागज़ को चार बराबर भागों में बांटा गया है तो इस प्रकार के 5 चौथाई भाग इस कागज़ को पूरा ढक लेंगे और अतिरिक्त कागज़ की भी आवश्यक पड़ेगी। इसलिए 5 चौथाई एक से बड़ा भिन्न है।

E 13) कक्षा चार के बच्चों को $\frac{5}{4}$ समझाने हेतु कोई अभ्यास सुझाइए।

अब जबकि बच्चे जानते हैं कि दो भिन्न समान है, हम उन्हें भिन्नों की तुलना से परिचित करा सकते हैं। यदि वे समान न हो तो उनमें क्या सम्बंध होगा, क्या हम कह सकते है कि एक भिन्न बड़ी या छोटी है? अगले भाग में हम इसी पर चर्चा करेंगे।

8.5 भिन्नों की तुलना करना

दो भिन्नों का क्रमण, यानी यह तय कर पाने कि समझ कि क्या वे बराबर हैं या एक छोटा एक बड़ा है और यदि हां तो कौन सा छोटा व कौन सा बड़ा है, के लिए आवश्यक होता है कि बच्चे पहले इकाई भिन्नों के क्रमण की समझ हासिल करें। इसके लिए नीचे दी गई कुछ आसान गतिविधियों की मदद ली जा सकती है।

उदाहरण 13

एक ही माप की कागज़ की दस पट्टियां लें। पहले पट्टी को वैसी ही रहने दें। दूसरी पट्टी को दो बराबर भागों में बांट दें, तीसरी पट्टी को तीन बराबर भागों.......... इसी प्रकार से दसवीं पट्टी को दस बराबर भागों में बांट दें। अब इन्हें एक गत्ते पर एक–दूसरे के नीचे चिपका दें और हर पट्टी के एक–एक भाग को रंग दें। (चित्र 25 देखें)।

बराबर माप की पट्टीयों के अलग–अलग रंगे भागों को देखकर बच्चे समझ पांएगे कि

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}......>\frac{1}{10}.$$

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}......>\frac{1}{10}$ समझाने की इस गतिविधि को संख्या रेखा (number line) की मदद से भी किया जा सकता है। विद्यार्थीयों के लिए संख्या रेखा भिन्नों को निरूपित करने के

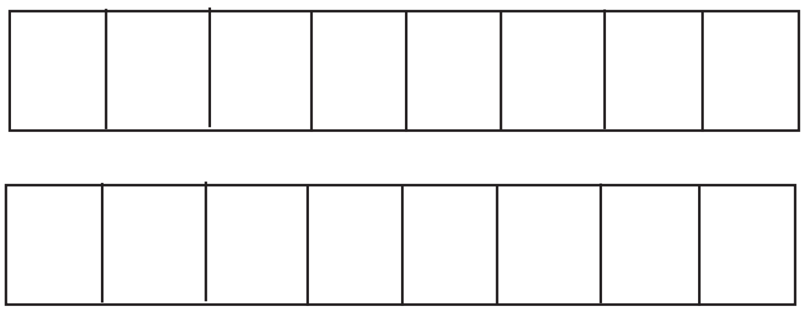
लिए एक चाक्षुष उपकरण का काम कर सकती है। आप इसकी जांच बच्चों के साथ इसका उपयोग करके कर सकते हैं।

चित्र 25

E 14) संख्या रेखा की मदद से कक्षा में यह समझाइए कि $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots\ldots > \frac{1}{10}$ होता है। आपके विद्यार्थीयों की क्या प्रतिक्रिया रही? क्या संख्या रेखा पर भिन्न संख्याओं के निरूपण को समझना उन्हें ज़्यादा मुश्किल लगता है या यह उनके लिए एक उपयोगी चाक्षुष उपकरण का काम करती है?

भिन्नों को क्रमण समझने के लिए यह समझना बहुत आवश्यक है कि 'पूर्ण' का माप क्या है और उसे कितने भागों में बांटा गया है? यदि बच्चे को इस वस्तु की समझ है, तो उसके लिए इकाई भिन्नों, समान अंश वाली भिन्नों और समान हर वाली भिन्नों का क्रमण करना आसान हो जाता है। परन्तु कई बार बच्चे माप और भागों के बीच के सम्बन्ध की गलत व्याख्या कर बैठते हैं। इस संदर्भ में मुझे अपनी 8 वर्षीय भतीजी अंकिता के साथ हुआ अनुभव याद आता है।

एक बार मैं उससे भिन्नों के क्रमण के बारे में बातचीत कर रही थी। इकाई भिन्नों के क्रमण को लेकर अंकिता में काफी आत्मविश्वास नज़र आ रहा था उसने आसानी से यह बता दिया कि $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ से छोटा है। इसने यह भी बताया कि वह ऐसा क्यों समझती है। उसने बताया कि यदि वह एक केक को 7 और बच्चों के साथ बांटेगी तो उसे कम भाग मिलेगा जबकि यदि उसी केक को वह 4 और बच्चों के साथ बांटेगी तो उसे ज़्यादा भाग मिलेगा। उसने $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{1}{20}$ आदि भिन्नों को भी आसानी से क्रमबद्ध कर दिया। मगर जब उसने यह कहा कि $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{8}$ से कम है तो मैं आश्चर्य चकित रह गई। उसका कहना था कि 7 भागों का मतलब हुआ ज़्यादा भाग और जब भागों की संख्या ज़्यादा होगी तो प्रत्येक भाग माप में छोटा होगा। मैंने कहा कि चलो देखते हैं। मैंने कागज़ की दो बराबर पट्टियां ली और दोनों को 8 बराबर भागों में बांटा (चित्र 26 देखें)। अंकिता ने इस काम में मेरी सहायता की।



चित्र 26

उदाहरण 14

मैं : अंकिता, अब पहली पट्टी लेकर उसके 8 भागों में से 4 में काला रंग भर दो।

अंकिता : जी आण्टी। लीजिए, हो गया, (चित्र–27)

चित्र 27

मैं : काला भाग कितना भाग है?

अंकिता : $\frac{4}{8}$

मैं : ठीक। अब दूसरी पट्टी लो और उसके 8 भागों में से 7 को भूरा कर दो।

अंकिता : लीजिए, हो गया (चित्र–28)

चित्र 28

मैं : भूरा भाग कितना भाग है?

अंकिता : $\frac{7}{8}$

मैं : कौन सा भाग बड़ा है – काला रंग वाला भाग या भूरा रंग वाला भाग।

अंकिता : भूरा रंग वाला भाग ज़्यादा है।

और इससे पहले कि मैं उससे कोई और प्रश्न करूं, उसने खुद ही ठीक उत्तर दे दिया। अब उसे इस काम में मज़ा आने लगा था और वह चाहती थी कि मैं इस तरह की और गतिविधियां उसके साथ करूं। अतः मैंने कागज़ की मदद से उसे $\frac{4}{4}$ और $\frac{5}{4}$ दिखाया। इस बीच मैंने उससे कुछ प्रश्न भी पूछे, जैसे कि $\frac{4}{4}$ और $\frac{5}{4}$ में से कौन से बड़ा है? और क्यों है? उसने बढ़िया उत्तर दिए।

अब उसे यह स्पष्ट था कि $\frac{4}{13}, \frac{4}{8}$ से कम है। परन्तु उसके लिए यह तय कर पाना अभी भी मुश्किल था कि $\frac{7}{8}$ कम है या $\frac{12}{13}$। मैंने सोचा कि उत्तर उसी से प्राप्त करना चाहिए। मैं निम्नलिखित ढंग से आगे बढ़ी।

मैं : अंकिता क्या अब तुम्हे $\frac{7}{8}$ और $\frac{11}{8}$ या $\frac{3}{7}$ और $\frac{4}{7}$ जैसी संख्याओं की तुलना करने कोई कठिनाई है?

अंकिता : जी नहीं आण्टी, यह तो बहुत सरल है। इसके कोई कठिनाई नहीं है।

मैं : तुम्हें ऐसा क्यों लगता है कि $\frac{7}{8}$ और $\frac{11}{8}$ की तुलना करना आसान है और $\frac{7}{8}$ व $\frac{12}{13}$ की तुलना करना ज्यादा कठिन है?

अंकिता : यह इसलिए आसान है क्योंकि दोनों में हर समान है और हमें सिर्फ अंश की चिंता करनी होती है।

मैं : ठीक। मगर क्या तुम $\frac{7}{8}$ और $\frac{12}{13}$ को बदलकर ऐसी संख्या नहीं बना सकती जिनमें हर समान हों।

(थोड़ा सोचकर)

अंकिता : हां, कर सकती हूं।

उसने कुछ परिकलन किया और उत्तर निकाल लिया।

अंकिता : $\frac{7}{8}$ और $\frac{12}{13}$ के तुल्य संख्याएं $\frac{91}{104}$ और $\frac{96}{104}$ हैं।

मैं : ठीक क्या अब तुम बता सकती हो कि भिन्न $\frac{7}{8}$ बड़ा है या $\frac{12}{13}$?

अंकिता : (मुस्कराते हुए) हां, $\frac{12}{13}$ बड़ा है।

अंकिता खुश और रोमांचित थी। उसे ऐसा अभ्यास करके मज़ा आया था और उसमें आत्मविश्वास नज़र आ रहा था। यह देखकर मुझे भी खुशी हुई।

जब आपको यह लगे कि प्रत्यक्ष व चित्रात्मक साधनों से बच्चे भिन्नों के क्रमण की संकल्पना समझ चुके हैं, तो आप उन्हें एक सामान्य नियम बता सकते हैं। इसे आम तौर पर सामान्य हर का नियम कहते हैं। भिन्नों का क्रम पता लगाने में इसका प्रयोग होता है। **इस नियम के अनुसार दो या दो से ज्यादा भिन्नों की तुलना करने के लिए उन्हें ऐसी तुल्य संख्याओं में बदला जाता है जिनमें सबके हर बराबर हों। तब जिस भिन्न का अंश सबसे बड़ा हो, वह सबसे बड़ी भिन्न होगी**

E 15) सामान्य हर नियम का प्रयोग किए बगैर आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि $\frac{12}{13}$ और $\frac{7}{8}$ में से कौन सी संख्या बड़ी है?

अब हम एक ऐसी समस्या के बारे में चर्चा करेंगे जो प्राय बच्चों के सामने आती है। यह समस्या है विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने की। साथ ही मिश्रित भिन्न की असमान भिन्नों से सम्बन्ध पर भी ध्यान देंगे।

8.6 मिश्रित भिन्न

प्राथमिक विद्यालय के शिक्षक अक्सर यह बताते हैं कि विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलते वक्त बच्चे आम तौर पर मिश्रित भिन्न में पूर्णांक वाले स्थान पर भागफल की बजाय शेषफल लिख देते हैं।

पिछले रविवार एक मित्र के घर पर मुझे यही देखने को मिला। उसकी 9 वर्षीय बेटी मिनी अपना गृहकार्य कर रही थी। मैंने उसकी नोट बुक पर यूँ ही निगाह डाली। वह विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने के प्रश्न हल कर रही थी। उसने 7 में 4 का भाग इस तरह किया:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4\overline{)7} \\ \underline{4} \\ 3 \end{array}$$

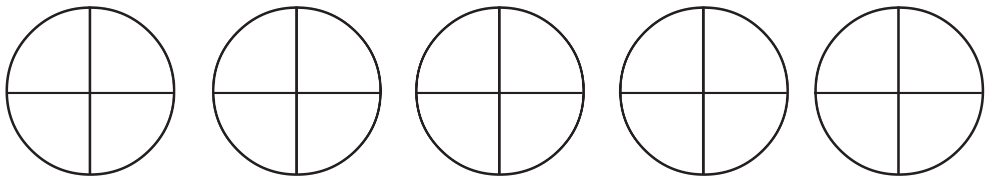
और $\frac{7}{4}$ को $3\frac{1}{4}$ लिख दिया। मैं चुपचाप देखती रही। उसने फिर

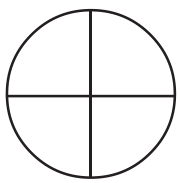
$$\frac{11}{6} = \begin{array}{r} 1 \\ 6\overline{)\,1\;1} \\ \underline{6} \\ 5 \end{array} = 5\frac{1}{6}$$ लिखा।

उससे बात करते हुए समझ में आया कि विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने के बारे में उसके शिक्षक ने उसे जो कुछ बताया होगा, उसे उसका धुंधला से अहसास था। वह एक मशीन की तरह ये प्रश्न कर रही थी और वह जो कुछ कर रही थी, उसका कोई ठोस चित्र उसके दिमाग में नहीं था। मैंने बात को स्पष्ट करने के लिए निम्नलिखित तरीका अपनाया।

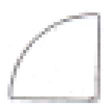
उदाहरण 15

मैंने पांच वृत्ताकार कागज़ के टुकड़े लिए। हर एक टुकड़े को चार बराबर भागों में बांटा गया था।

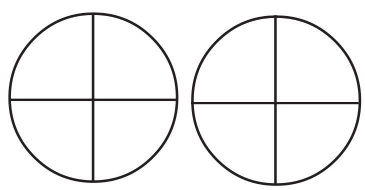


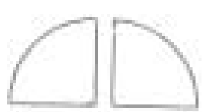
मैं:  का $\frac{1}{4}$ कितना होगा?

मिनी : 4 भागों में से एक भाग।

मैं : क्या यह  होगा?

मिनी : हां।

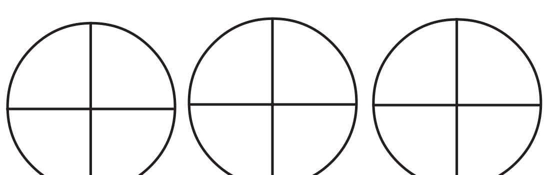
मैं : अब बताओं कि  का $\frac{1}{4}$ कितना होगा?

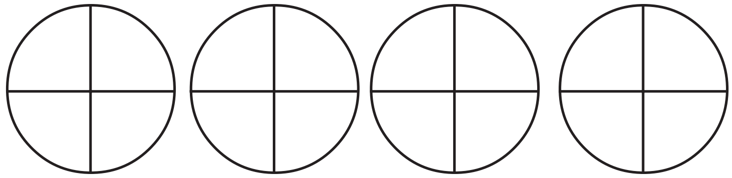
मिनी :  होगा।

मैं : यह कितना भाग दर्शाता है?

मिनी : यह $\frac{2}{4}$ है।

मैं : बढ़िया। यानी यह दो एक–चौथाई है। क्या इसी तरह से हम कह सकते हैं कि

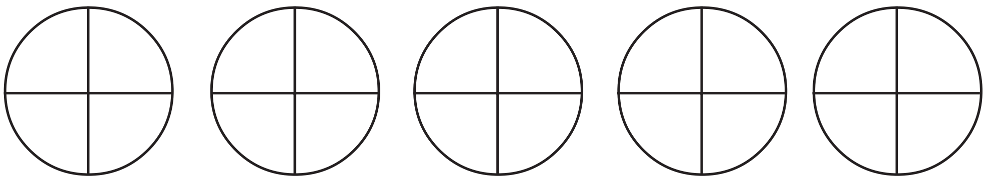
 का $\frac{1}{4}$ यानी तीन

एक–चौथाई $\frac{3}{4}$ है और 

का $\frac{1}{4}$ यानी चार एक–चौथाई = 1 है।

मिनी : हां आण्टी।

मैं : अब बताओं कि

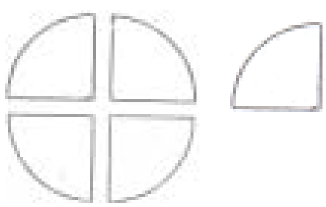


का $\frac{1}{4}$ यानी पांच एक–चौथाई क्या होगा?

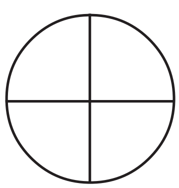
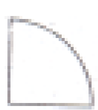
मिनी थोड़ी भ्रमित दिख रही थी। मैंने थोड़ी मदद करने का सोचा।

मैं : मिनी क्या $\frac{5}{4}$ और 5 का $\frac{1}{4}$ एक ही बात नहीं हैं?

मिनी : हाँ.........हाँ। अब मैं बता सकती हूँ कि 5 का $\frac{1}{4}$ क्या होगा। 5 का $\frac{1}{4}$ होगाः



मैं : क्या इसे हम ऐसे नहीं कह सकते?

 +  $= 1\frac{1}{4}$?

मिनी : हां आण्टी। दोनों बराबर हैं।

मैं : ठीक। इसका अर्थ हुआ कि $\frac{5}{4}$ बराबर है। पूरे के और $\frac{1}{4}$ और 1 इसे हम

$1\frac{1}{4}$ लिखते हैं। जब हम 5 को 4 से भाग देते हैं $\begin{array}{r} 1 \\ 4\overline{)5} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$ तो भागफल से हमें

मिश्रित भिन्न का पूर्णांक वाला भाग मिलता है और शेषफल/भाजक से हमें उसका उचित भिन्न वाला भाग मिलता है। अर्थात $\frac{5}{4}$ = भागफल $\frac{\text{शेष}}{\text{भाजक}} = 1\frac{1}{4}$ होता है।

अब बताओ $\frac{7}{4}$ के बारे में क्या कहती हो?

मिनी ने अपनी नोट बुक की तरफ देखा और मुस्करा दी।

मिनी : अब यह बात मुझे समझ आ गई है। आपने जैसा बताया उसके हिसाब से $\frac{7}{4}$ हुआ एक पूरा और $\frac{3}{4}$ और इसलिए यह $1\frac{3}{4}$ होगा।

मिनी ने अपनी गलती समझ ली थी। इसी तरह के कुछ और प्रश्न हल करने के बाद उसका आत्म विश्वास बढ़ गया था।

———x———

और अब आपके लिए कुछ प्रशन।

E 16) मिनी की समस्या क्या थी?

E 17) क्या आप कोई और तरीका सुझा सकते हैं जिसका उपयोग करके मिनी की गलती को सुधारा जा सकता था।

इकाई को समाप्त करने से पहले आइए देखें कि यहां हमने क्या–क्या चर्चा की।

8.7 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित पहलुओं पर चर्चा कीः

1) 10 वर्ष तक के बच्चों में आम तौर पर 'आधे' को लेकर काफी उलझे हुए विचार होते हैं। पूर्ण को कोई भी भाग उनके लिए आधा होता है। वे इस बात का महत्व नहीं समझ पाते कि किसी भी पूर्ण का 'आधा' पता लगाने के लिए दो बराबर भाग करना आवश्यक होता है। इसके अलावा कई बच्चों को लगता है कि विभाजक रेखा केवल सरल रेखा ही हो सकती है। यदि बच्चों को उनके इर्द–गिर्द उपलब्ध प्रत्यक्ष चीज़ों के साथ गतिविधियां करवाई जाएं, तो काफी हद तक ऐसी गलतफहमियों से बचा जा सकता है। उन्हें वृत्त, वर्ग, त्रिकोण आदि आकृतियों को अलग–अलग ढंग से दो बराबर–बराबर भागों में बांटने को कहा जा सकता है। जब वे किसी वस्तु को दो भागें में बांट लें तो उनसे इस बात की जांच करने को कह सकते हैं कि दोनों भाग बराबर हैं या नहीं।

2) इस आयु के बच्चों को एक और कठिनाई यह आती है कि वे अंश का सम्बंध पूर्ण से नहीं जोड़ पाते। वे यह नहीं समझ पाते कि अंश का अर्थ पूर्ण के संदर्भ में ही है।

इस समस्या से निपटने के लिए हमें अंश के साथ सदैव सम्बंधित पूर्ण का उल्लेख करना चाहिए। यह भी आवश्यक है कि हम बच्चों को अलग–अलग गतिविधियों के ज़रिये विभिन्न किस्म के पूर्ण से परिचित कराएं।

3) आम तौर पर यह देखा गया है कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन व उन्हें संकेत रूप में दर्शाने में कठिनाई होती है। भिन्नों को संकेत रूप में दर्शाने के नियम समझना उनके लिए मुश्किल होता है। भिन्नों के प्रतीकन के तरीके को लेकर बच्चे के दिमाग में कोई उलझन हो, तो उसे दूर करने के बाद ही इस विषय में आगे बढ़ना चाहिए। जब बच्चे 'आधा', 'तिहाई', 'चौथाई', जैसे भिन्नों के नाम व पूर्ण से उनके सम्बंध में भली भांति परिचित हो जाएं तभी उन्हें भिन्नों के संकेतों से परिचित कराया जाना चाहिए। उन्हें यह स्पष्ट हो जाता चाहिए कि जब हम 2 के नीचे लाइन खींचकर लाइन के नीचे 3 लिखते हैं। यानी $\frac{2}{3}$ लिखते हैं तो भिन्न $\frac{2}{3}$ का हर हमें बताता है कि पूर्ण के तीन बराबर भाग किए गए हैं और अंश बताता है कि हम इनमें से 2 भागों को ले रहे हैं। उन्हें भिन्नों के नाम को संकेत में बदलने का काफी अभ्यास कराना चाहिए। इसके लिए शिक्षक कक्षा में कई गतिविधियां करवा सकते हैं।

4) भिन्नों को अंश–हर के रूप में लिखकर एक ही भिन्न को अलग–अलग ढंग से दर्शा सकते हैं। बच्चों से कहा जा सकता है कि वे किसी एक भिन्न को दर्शाने के लिए अधिक से अधिक संख्याएं खोजें। यह कर लेने के बाद उन्हें तुल्य भिन्न की संकल्पना से परिचित कराया जा सकता है। कागज़ मोड़ने तथा इसी तरह की अन्य गतिविधियां करने व विभिन्न किस्म के पूर्ण से परिचित होने के बाद उन्हें यह समझने में कठिनाई नहीं होती है कि क्यों इतनी सख्याएं परस्पर तुल्य हैं। जब बच्चे एक भिन्न के तुल्य अन्य भिन्न खोजने का काफी अभ्यास कर चुकें तब उन्हें हर उदाहरण में क्रम खोजने दें और तुल्य भिन्न लिखने का नियम खुद ब खुद पता करने दें।

5) जब बच्चे तुल्य भिन्न लिखने के नियम से परिचित हो जाएं तो उन्हें अंश व हर के गुणनखंड से भाग देकर तुल्य भिन्न पता करने का काफी अभ्यास करवाएं क्योंकि इसमें बच्चों को प्रायः कठिनाई होती है।

6) पूर्ण को कुल कितने भागों में बांटा गया है तथा प्रत्येक भाग के आकार के परस्पर सम्बंध को समझने में बच्चे कई बार गलती कर बैठते हैं। इसका असर भिन्नों का क्रमण करने पर भी पड़ता है। कागज़ को रंगने की गतिविधि के जरिये उन्हें यह समझने में मदद मिल सकती है कि कौन सी संख्या बड़ी है। शिक्षक इकाई भिन्न से शुरू करके समान अंश या समान हर वाले भिन्न पर जा सकते हैं। इस तरह से बच्चे स्वयं अन्य भिन्नों जैसे $\frac{5}{6}$ व $\frac{7}{8}$ तथा $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{7}$ आदि की तुलना का नियम यानी सामान्य हर नियम खोज पाएंगे।

7) 8-10 वर्ष के बच्चों को विषय भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने में कठिनाई होती है। इससे निपटने के लिए प्रत्यक्ष चीज़ों के साथ गतिविधि के ज़रिये दिखाया जा सकता है कि $\frac{7}{4}$ (यानी सात एक–चौथाई या 7 का $\frac{1}{4}$) का वास्तव में अर्थ क्या है? इससे उन्हें एक प्रत्यक्ष चित्र हासिल होगा और वे संकल्पना को समझ पाएंगे।

8.8 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E 1) i) एक बच्ची को ब्रेड या चपाती दीजिए और उसे उसमें से आधा लेने को कहिए। जब वह यह कर चुके तो उससे कहिए कि जाँच कर ले कि दोनों भाग बराबर हैं या नहीं।

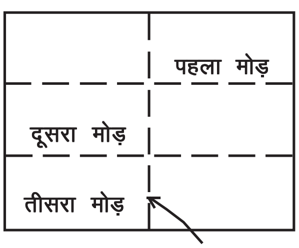
ii) बच्चों को मिट्टी या कागज़ से बनी आकृतियां देकर कहा जा सकता है कि वे उन्हें दो बराबर भागों में बांटें। यह काम वे आकृति को काटकर, मोड़कर या चित्र बनाकर कर सकते हैं।

E 2) क) दरअसल अंकित ने बड़े वर्ग के अन्दर चार वर्गों (मोटी रेखा से दर्शाए गए वर्गों को चार अलग–अलग पूर्ण मानकर जवाब दिया। वह यह नहीं समझ पाया कि ये चार वर्ग वास्तव में उसी पूर्ण यानी बड़े वर्ग के भाग हैं। यह समस्या अंश का सम्बंध पूर्ण से न देख पाने की वजह से है।

ख) जी हां। पूर्ण और उसके अंशों के सम्बंध वाली समस्या इस आयु के बच्चों की आम समस्या है।

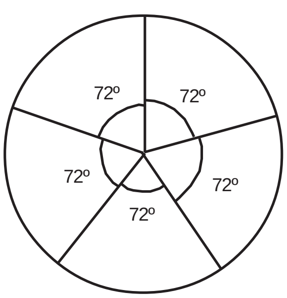
ग) कागज़ मोड़ने या कंचे, बिस्कुट, टाफियों जैसी प्रत्यक्ष चीज़ों के साथ गतिविधियों के द्वारा उसके संकल्प स्पष्ट किए जा सकते हैं।

E 3) आप एक आयताकार कागज़ लेकर उसे तीन बराबर भागों में मोड़ सकते हैं। मोड़ों पर कागज़ को दबाकर खोलिए। इस तरह $\frac{1}{3}$ दिखाया जा सकता है। इस गतिविधि को दोहराकर तथा कागज़ को एक बार फिर मोड़कर $\frac{1}{6}$ दिखाया जा सकता है। (चित्र-29 देखें।)



चित्र 29

E 4) एक वृत्त को पांच बराबर भागों में बांटना बच्चों के लिए प्रायः कठिन होता है। अतः आप एक वृत्त या आयत खींचकर उसे पांच बराबर भागों में बांट दें। जैसा कि चित्र. 30 में दिखाया गया है। अब इनमें से एक भाग में रंग भर दें और बच्चे से इसे भिन्न में दर्शाने को कहें। या आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह $\frac{1}{5}$ भाग में रंग भरे। यही बात आप कागज़ मोड़कर भी दिखा सकते हैं। आप यह भी की सकते हैं कि 10 टाफियां लेकर बच्चे से उन्हें पांच दोस्तों में बराबर–बराबर बांटने को कहें। इसके बाद बच्चे से पूछें कि प्रत्येक को कितनी–कितनी टाफियां मिली।



चित्र 30

E 5) कक्षा में आप सभी बच्चों के साथ कागज़ वाला अभ्यास कर सकते हैं। उन्हें तीन वर्गों में बांट दें। प्रत्येक वर्ग से कहें कि वह कागज़ को दो बराबर भागों में मोड़ ले। कागज़ को वापिस खोलकर आधे भाग को छायादार बनाएं। बच्चों से आप यह भी कहलवाएं कि उन्हें पूरे का आधा प्राप्त हुआ है। इसके बाद आप कागज़ के तीन बराबर भाग करने वाली गतिविधि करवा सकते हैं। यह दो भाग करने से कहीं ज्यादा कठिन है। इसके बाद आप हर वर्ग को 12 कंचे या टाफियां देकर उनसे इन्हें तीन या चार बराबर भागों में बांटने को कह सकते हैं।

E 6) i) एक दरज़न केले या संतरे लें, जिनमें से तीन खराब हों। बच्चों से खराब सड़े केले/संतरों को छांटने को कहें। अब उनसे शेष केलों/संतरों को भिन्न के रूप में बताने को कहें।

ii) 3 चपातियां लेकर 4 बच्चों से कहिए कि आपस में बराबर–बराबर बांट लें। वे दो तरीके अपना सकते हैं:

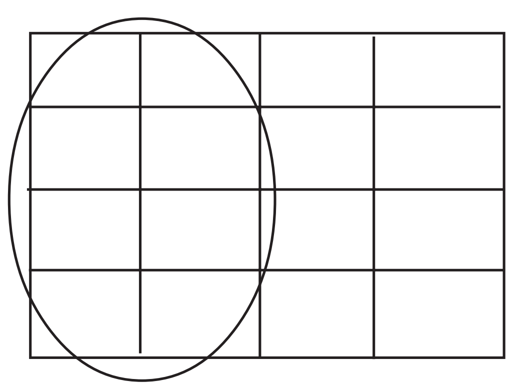
क) तीन लड़के एक–एक चपाती ले लें और फिर प्रत्येक लड़का $\frac{1}{4}$ चपाती चौथे बच्चे को दे सकते है।

ख) वे तीनों चपातियों को चार बराबर–बराबर भागों में बांटकर फिर इन भागों को आपस में बराबर बांट सकते हैं।

चपाती बराबर–बराबर बांट लेने के बाद उनसे यह लिखने को कहा जा सकता है कि प्रत्येक को कितना भाग मिला।

E 7) चित्र-17 और अंकिता द्वारा दी गई व्याख्या सही है। सही पहलू पर बच्चों का ध्यान केन्द्रित करने के लिए काफी चर्चा करनी पड़ती है व समय भी लगाना पड़ता है। भिन्नों के प्रतीकन का अभ्यास कराने के लिए कई उदाहरणों का सहारा लेना होता है। यह किया जा सकता है कि पूरी कक्षा को टोलियों में बांट दिया जाए और हर टोली से कहा जाए कि वह कागज़ के हर भाग को अधिक से अधिक तरीकों से व्यक्त करें। हर नया तरीका खोजने पर उस टोली को एक अतिरिक्त अंक दिया जाए। अधिकतम अंक हासिल करने वाली टोली विजेता होगी। ऐसी गतिविधियों से उन्हें अनजाने में ही भागों के नामों का अच्छा अनुभव हो जाएगा। इससे उन्हें भिन्नों की तुल्यता समझने में मदद मिलेगी।

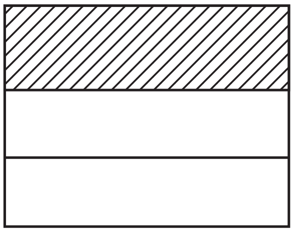
E 8) इस संदर्भ में मैं आपसे एक गतिविधि की चर्चा करना चाहूँगी जो मैंने एक कक्षा में देखी थी। शिक्षक ने कक्षा में 4-5 टोलियों में बांट दिया था। अब उन्होंने बोर्ड पर एक चित्र बनाया (चित्र-31 देखें)।



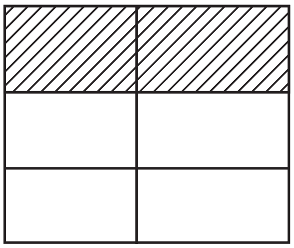
चित्र 31

शिक्षक ने बच्चों से कहा कि वे इसे कागज़ पर बना लें और गोल घेरे से घिरे भाग के बारे में जो कुछ बता सकते हैं बताएं। बच्चों ने अपनी–अपनी टोली में काम किया और निष्कर्ष लिख लिए। उन्होंने एक–दूसरे को यह भी समझाया कि उस भाग को उन्होंने वही नाम क्यों दिया। इसे 'आधा' कहेंगे क्योंकि पूरे कागज़ पर

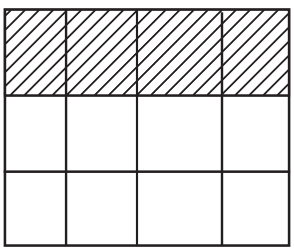
इसके समान दो भाग हैं। इसे 'चार–आठवां भाग' कहेंगे क्योंकि दो आयत 'आठवां भाग' हुए और इस तरह के यहां चार भाग हैं। इस तरह से शिक्षक ने उनसे उनके हर उत्तर का कारण भी पूछा जैसे घिरा हुआ भाग क्यों दो चौथाई है या 'आठ–सोलहवां' है या 'चार सोलहवां' आदि है। बच्चों ने इन नामों को शब्दों में भी लिखा और भिन्न संख्या के रूप में भी, क्योंकि हर नए तरीके से लिखने का उन्हें एक अंक मिलता था। इस गतिविधि के ज़रिये शिक्षक को यह पता चला कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन का कितना अनुभव है।



चित्र 32



चित्र 33



चित्र 34

E 9) $\frac{1}{3}$ के तुल्य भिन्न दर्शाने के लिए एक आयताकार कागज़ लेकर उसको तीन बराबर भागें में मोड़ लें। अच्छे से दबाकर इसे खोल लें। कागज़ तीन बराबर भागें में बंट जाएगा (चित्र-32 देखें) कागज़ को एक बार फिर मोड़कर खोल लें (चित्र-33 देखें)। कागज़ अब छः बराबर भागों में बंट गया है। इस क्रिया को एक बार और दोहराएं और चित्र-34 में दिखाए अनुसार कागज़ 12 बराबर भागों में बंट जाएगा। अब चित्र-32 में $\frac{1}{3}$ भाग को, चित्र-33 में $\frac{2}{6}$ भाग को तथा चित्र.34 में $\frac{4}{12}$ भाग को रंगकर आप बता सकते हैं कि $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ चित्र 32, 33 व 34 की मदद से आप यह भी दिखा सकते हैं कि $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ और $\frac{8}{12}$ आपस में तुल्य हैं।

E 10) ऐसी गतिविधियों की उपयोगिता आंकने के लिए मैंने कुछ शिक्षकों से बातचीत की। उनमें से कुछ की राय थी कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को तुल्यता की बात समझने में ज़रूर मदद मिलती है। उनका कहना था कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को यह देखने व समझने में मदद मिलती है कि क्यों $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ के तुल्य है और $\frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ के। इस तरह की गतिविधियों से उन्हें अपनी गलतफहमियां दूर करने में भी मदद मिलती है। बड़ी संख्या में ऐसे उदाहरणों को हल करके बच्चे इनमें निहित क्रम पहचान पाएंगे। परन्तु यह आवश्यक नहीं कि आप इससे सहमत ही हों। अच्छा यह होगा कि आप अपनी कक्षा में इन गतिविधियों को आजमाएं और इनके बारे में अपनी राय लिखें।

E 11) इसका मूल्यांकन करने का एक तरीका यह हो सकता है कि आप बच्चों से किसी भिन्न के तुल्य भिन्न लिखने का अभ्यास करवाएं जिसके अंश व हर मूल भिन्न से छोटे हों। फिर कक्षा में घूमकर आप उनके उत्तरों की जांच कर सकते हैं। बीच–बीच में उनसे कागज़ मोड़कर अपने उत्तर की जांच करने को भी कह सकते हैं।

E 12) यह काम कागज़ मोड़कर या रंगकर किया जा सकता है। बच्चों से बराबर माप के दो कागज़ लेने को कहें। एक को 6 बराबर भागों व दूसरे को 4 बराबर भागों में मोड़ें। उनसे पहले कागज़ में से 5 भागों में हरा रंग भरने को और दूसरे कागज़ में 4 में से 3 भाग लाल/काला रंगने को कहें। अब उनसे कहें कि रंगे हुए भाग

की तुलना करके बताएं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर हैं या नहीं। यही गतिविधि 12-12 कंचों के दो समूह लेकर भी की जा सकती है। पहले समूह को 2-2 कंचों के 6 समूहों में बांट दें। अब देखें कि ऐसे 5 समूहों में कुछ मिलाकर कितने कंचे हैं। दूसरे समूह को 3-3 कंचो के 4 समूहों में बांट दें और देखें कि ऐसे तीन समूहों में कुल कितने कंचे हैं। अब आप आसानी से दिखा सकते हैं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर नहीं है।

E 13) $\frac{5}{4}$ दिखाने के लिए कागज़ मोड़ने की आसान–सी गतिविधि की जा सकती है। विभिन्न चरण निम्नानुसार होंगेः

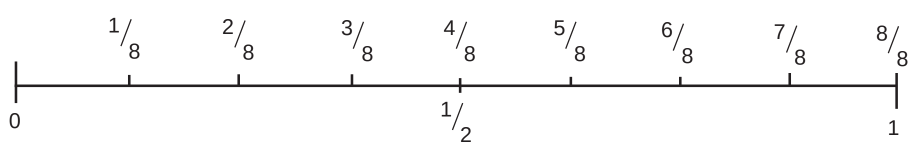
चरण 1 : एक कागज़ को चार भागों में मोड़ दें।

चरण 2 : एक भाग बताएं जो पूरे का एक–चौथाई हो। क्या आप 5 एक–चौथाई भागों को रंग सकते हैं? नहीं ! 5 एक–चौथाई भाग दिखाने के लिए हमें एक और कागज़ की जरूरत होगी।

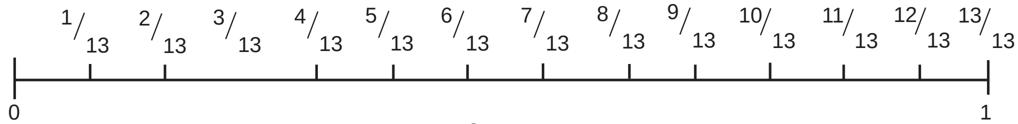
चरण 3 : एक और कागज़ को मोड़े। इसके 4 भागों में एक भाग काट लें और इसे पहले कागज़ के साथ चिपका दें। अब आप $\frac{5}{4}$ दिखा सकते हैं।

E 14) संख्या रेखा पर $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots\ldots > \frac{1}{10}$ दिखाते वक्त यह ध्यान रखें कि हर बार जब आप संख्या रेखा बनाएं, और इस पर एक इकाई दूरी लें, तो यह दूरी हर बार एक ही हो। बाद में भी जब इस इकाई दूरी को छोटे–छोटे भागों में बांटें तो हर भाग की लम्बाई बराबर हो ताकि बच्चे यह देख सकें कि $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ है या $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$ है। कई शिक्षकों का मत है कि संख्या रेखा के प्रयोग से भिन्न की संकल्पना को संख्या की संकल्पना से जोड़ने में मदद मिलती है।

E 15) $\frac{12}{13}$, $\frac{7}{8}$ से बड़ा है, इस बात को संख्या रेखा से भी दिखाया जा सकता है चित्र-35 के अनुसार आप दिखा सकते हैं कि $\frac{8}{8}$ एक पूर्ण है।



चित्र 35



चित्र 36

जबकि $\frac{7}{8}$ उससे 1 भाग यानी $\frac{1}{8}$ कम है। इसी प्रकार से $\frac{13}{13}$ एक पूर्ण है और $\frac{12}{13}$ उससे एक भाग यानी $\frac{1}{13}$ कम है (देखें चित्र-36)

अब बताइए कि $\frac{1}{13}$ छोटा है या $\frac{1}{8}$? इसका उत्तर बच्चों को निकालने दीजिए और उसके बाद तय करने दीजिए कि $\frac{12}{13}$ और $\frac{7}{8}$ में से कौन–सा बड़ा है। यदि किसी बच्चे को कठिनाई हो, तो कुछ और प्रश्न पूछ कर उसकी मदद करें।

E 16) ऐसा लगता है कि मिनी को प्रत्यक्ष चीजों या कागज़ मोड़ने/रंगने की गतिविधियों के माध्यम से यह समझने का मौका कभी न मिला था कि $\frac{7}{4}$ होता क्या है? वह $\frac{7}{4}$ या $\frac{11}{6}$ जैसी संख्याओं को मात्र विषम भिन्न के रूप में जानती थी, जिन्हें मिश्रित भिन्न में बदलना होता है। वह तो इतना जानती थी कि शिक्षक ने उसे यह काम करने का एक तरीका भी बताया था।

E 17) मिनी की गलती सुधारने के लिए जरूरी था कि वह यह समझे कि $\frac{7}{4}$ का अर्थ होता है–4 भागों में से 7 भाग। जिसके लिए हमें एक समूचा पूर्ण लेना होगा तथा एक और पूर्ण के 4 भागों में से तीन भाग लेने होंगे। उसे यह समझाया जाना चाहिए कि $\frac{7}{4} = 1$ पूर्ण तथा $\frac{3}{4}$ और। यही काम हम कागज़ मोड़ने की गतिविधि की मदद से भी कर सकते हैं। हम दिखा सकते हैं कि $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} =$ भागफल$\frac{\text{शेष}}{\text{भाजक}}$.